線形代数学概論 A NO.4 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 一次写像と行列。

(本講義では、係数体 (スカラーの集合) としては実数体 $\mathbb{R}$ を扱っています。が、$\mathbb{R}$ を他の体に変えてもほとんど同じことが成り立つので、余力のある人は注意しておくとよいでしょう。)

線形空間を比較するには線形写像を用います。線形写像とは、和と、スカラー倍を保つような写像のことでした。$\mathbb{R}^n$ から他のベクトル空間 W への線形写像 f は基本ベクトルの行き先 $\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$ だけを決めれば定まるのでした。

…………………………………………………………………………

定義 4.1. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f が

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

を満たすとき、f は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{i,j}$$

という数字の並びによって一意に決まる。A のことを f を **表現する行列**という。(行列のサイズまで込めて言いたい時は、(m,n)-行列とか $m \times n$ 行列、はたまた m 行 n 列の行列と呼ぶ。) 行列 A において、a_{ij} を A の (i,j)-成分、縦の数の並びを**列**、横の数の並びを**行** という。

行と列を混乱しないように覚えるには、数学のノートを思い出せば良い。1 行目、2 行目、3 行目 etc. が第 1 行、第 2 行、第 3 行 etc である。

命題 4.1. 行列 A に対して、A の表現する線形写像は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

で与えられる。 $A\boldsymbol{x}$ のことを A と $\boldsymbol{x}$ との**積**とよぶ。

見れば分かるように、線形写像 (行列とベクトルの積) は定数項のない一次式で表される。したがって、線形写像のことを**一次写像**と呼ぶこともある。

命題 4.2. 線形写像の合成は線形写像である。

そこで、

定義 4.2. 行列の積を、対応する線形写像の合成で定義する。

具体的には、

命題 4.3. $A = (a_{ij}), B = (b_{kl})$ のときその積 AB は

$$\left(\sum_j \left(a_{ij}b_{jk}\right)_{ik}\right)$$

により与えられる。

※レポート問題

問題 4.1. x, y, z, l, m, n は実数とする。このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & l & 1 \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & n & 3 \end{pmatrix}$$

を計算せよ。

....

記法に関する補足。

$$\left(a_{ij}\right)_{ij}$$

とは、i, j 成分 (i 行 j 列にある数値) が a_{ij} の行列、という意味である。サイズは状況に応じて判断するとよい。例えば 2×3 行列 (2 行 3 列の行列) なら、

$$\left(a_{ij}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

という具合である。ここでの i や j という変数は全くのその場しのぎの変数であって、$(a_{ij})_{ij}$ と書いても $(a_{uv})_{uv}$ と書いても全く同じ意味になる。