線形代数学概論 A NO.2 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$

抽象的ベクトル空間、ベクトル空間の部分空間。一次独立性

実数直線も、

$$W_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

も、「同じ形」をしている。このような 2 つを同時に扱うのには、成分を見るのではなく、和と、スカラー倍という道具のみを用いて記述することが大事になる。そもそも、成分を扱ってばかりいるのではベクトルを研究する意味がない。

定義 2.1 (教科書 5.1 および定理 1.1)**.** V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間**であるとは、つぎの性質を満たしているときにいう。

O (演算の存在) V には、和と、スカラー倍 ($\mathbb{R}$ の元による定数倍) が定義されている。

I (V は和に関して加法群である。)

(1) $\forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{z} \in V$ にたいし、$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$.

(2) $\exists \boldsymbol{0} \in V$ があって、$\forall \boldsymbol{x} \in V$ にたいし、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ がなりたつ。

(3) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して、$\exists \boldsymbol{y} \in V$ が存在して、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ。

(4) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ にたいして $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

II (スカラー倍の作用)

(5) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \boldsymbol{x} \in V \ (c_1 c_2)\boldsymbol{x} = c_1.(c_2.\boldsymbol{x})$.

(6) $\forall \boldsymbol{x} \in V \ 1.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

III (和とスカラー倍の協調性)

(7) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \boldsymbol{x} \in V \ (c_1+c_2)\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{x}$

(8) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \ c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$.

上で「$\mathbb{R}$」とあるところをことごとく「$\mathbb{C}$」で置き換えると、複素数体上のベクトル空間の定義になる。更に、$\mathbb{R}$ のところを体 (加減乗除について閉じたような集合)K で置き換えて、K 上のベクトル空間の定義を与えることができる。

命題 2.1. ベクトル空間 V にたいして、

(1) V の元 $\boldsymbol{v}$ で、 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ を満たすものがただひとつ存在する。これが V のゼロ元 *(***ゼロベクトル***)* である。

(2) V の各元 $\boldsymbol{x}$ に対して、 $0.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ。

(3) V の元 $\boldsymbol{x}$ に対して、 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{y}$ はただひとつである。これを $\boldsymbol{x}$ の**逆ベクトル**とよぶ。

定義 2.2. ベクトル空間 V の部分集合で、(同じ和とスカラー倍に関して) ベクトル空間であるようなものを、V の**部分ベクトル空間**と呼ぶ。

上述の W_0 も $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間である。

定義 2.3. V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ が**一次従属**であるとは、ある $(c_1, c_2, \ldots c_t) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ が存在して、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots c_t\boldsymbol{v}_t = 0$$

を満たすときにいう。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ が一次従属でない場合には、**一次独立**であると呼ばれる。

要するに、一次従属であるとは、与えられたベクトルの間に関係式が存在することである。一次独立かそうでない (一次従属) か、は和とスカラー倍のみを用いて記述されており、成分の値については直接は言及していない。いかにも線形代数的な概念である。

例 2.1. (線形従属なベクトルの例)

(1) $\mathbb{R}^4$ の元を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

で定めると、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である。$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ であるからである。

(2) $\mathbb{R}^3$ の元を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

で定めると、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である。$\boldsymbol{v}_1 + 6\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ であるからである。

(3) $\mathbb{R}^2$ の元を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定めると、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である。$5\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ であるからである。

上のように、具体的な数ベクトルが一次従属であるか否かを調べるときには、成分に言及する必要がある。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次従属であるという事は、最後のベクトル $\boldsymbol{v}_3$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ スカラー倍の和 (**線形結合**) を用いて書けるということにかなり近いが、最後の例のように例外も生じる。そこで定義では最初から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_t$ に関して対称な形で述べてあるのである。上の (2) で言えば、$1.\boldsymbol{v}_1 + 6.\boldsymbol{v}_2 - 1.\boldsymbol{v}_3 = 0$ という調子である。

例 2.2.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は一次独立である。実際、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$$

とすると、

$$c_1 + 5c_2 = 0, \quad 2c_1 + c_2 = 0$$

で、これを解くと $c_1 = 0, c_2 = 0$ を得るからである。

一次独立性、一次従属性を判定する場合にはうえのように一次方程式に帰着させる。下の問題も参照のこと。

※レポート問題

問題 2.1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だろうか、それとも一次従属だろうか。理由を挙げて答えなさい。