

代数学 IA NO.13 要約

今日のテーマ 群の直積 (+準同型定理の応用)

定義 13.1 (群の直積). (G_1, \spadesuit) と、 (G_2, \heartsuit) とが共に群であるとする。このとき、デカルト積集合

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2); g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

は、次のような演算 \diamond により群になる。

$$(a_1, a_2) \diamond (b_1, b_2) = (a_1 \spadesuit b_1, a_2 \heartsuit b_2)$$

$(G_1 \times G_2, \diamond)$ を G_1 と G_2 の (群としての) 直積と呼ぶ。

定理 13.1 (有限巡回群の直積分解). m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、同型

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

が存在する。

系 13.1. m, n を互いに素な整数とすると、

$$am + bn = 1$$

となる整数 a, b が存在する。

この系自身もよく利用される。 m, n が具体的に与えられたとき、 a, b の値を具体的に求めるには、ユークリッドの互除法を用いると良い。応用例として一つだけ挙げておく。

系 13.2 (系の系). m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の、 \bar{n} で生成される部分群は、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 自身である。

※レポート問題

(I) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は巡回群ではないことを証明しなさい。