

代数学 IA NO.9 要約

今日のテーマ

準同型とは、演算を保つ写像の事である。

定義 9.1. G を群、 K をその部分群とする。 K が G の正規部分群であるとは、任意の $g \in G$ と任意の $h \in K$ とに対して、

$$ghg^{-1} \in K$$

が成り立つときに言う。

定理 9.1. (重要) G を群、 H をその部分群とする。 G/H に次のような乗法を定めて群にしてやりたい。

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$

これが、代表元の取りかたによらずにうまくいって、 G/H が実際に群になるためには、 H が正規部分群である事が必要十分である。

定理 9.2. G を群、 N をその正規部分群とする。このとき G の二つの元 x, y に関する次の二つの条件は同値である。

- (1) ある $n \in N$ があって、 $xn = y$ が成り立つ。
- (2) ある $m \in N$ があって、 $mx = y$ が成り立つ。

すなわち、正規部分群でクラスわけする時には、「左」「右」をあまり気にしなくて良い。

定義 9.2. G, H を群とする。 G から H への写像 $f : G \rightarrow H$ が群準同型であるとは、任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して、

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$$

が成り立つときに言う。準同型 f が全単射でもある時、 f を同型と言う。

例 9.1. 準同型の例

- (1) 任意の群 G に対して、 G の上の恒等写像 $\text{id} : G \rightarrow G$ は G から G への準同型である。これは全単射であるから、同型である。
- (2) n を正の整数とする。 \mathbb{Z} から $n\mathbb{Z}$ への写像 f を、

$$f(k) = nk$$

により定めると、 f は準同型である。これも同型である。

- (3) n を正の整数とする。 \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への写像 f を、

$$f(k) = nk$$

で定めると、 f は準同型である。これは $n > 1$ なら同型ではない。

- (4) n を正の整数とする。 \mathbb{Z} から $C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ を、

$$f(k) = a^k$$

で定めると、 f は準同型である。これは同型ではない。

- (5) $(\mathbb{Z}, +)$ から $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ への写像 f を

$$f(k) = 2^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義すると、 f は準同型である。これは同型ではない。

例 9.2. (準同型でない例)

- (1) \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への写像 $n \mapsto n^2$ は準同型ではない。
- (2) \mathbb{Z} から \mathbb{Z} への写像 $n \mapsto n + 1$ も準同型ではない。

これまで、群には演算、というデータのほかに、単位元、逆元の存在が基本的であると言ってきた。これらは準同型で自動的に保存される。次の定理でそのことを示そう。

定理 9.3. G, H を群とする。 G から H への準同型写像 $f: G \rightarrow H$ に対して、次の事が成り立つ。

- (1) f は単位元を単位元にうつす。すなわち、

$$f(e_G) = e_H. \quad (e_G, e_H \text{ はそれぞれ } G, H \text{ の単位元})$$

- (2) f は逆元を逆元にうつす。すなわち、任意の G の元 g に対して、

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

が成り立つ。

- (3) 任意の整数 n と任意の G の元 g に対して、

$$f(g^n) = f(g)^n$$

が成り立つ。

● 準同型の核

定義 9.3. $f: G \rightarrow H$ を二つの群の間の準同型とする。 f の核 (kernel) とは、 H の単位元 e_H の f の逆像の事である。すなわち、

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(e_H) = \{g \in G; f(g) = e_H\}$$

準同型を調べよ、と言われたらとりあえずその核を調べる。核は次のような性質と役割をもつ。

定理 9.4. $f: G \rightarrow H$ を二つの群の間の準同型とする。このとき、

- (1) f の核 $\text{Ker}(f)$ は G の正規部分群である。
 (2) $g_1, g_2 \in G$ に対して、「 $f(g_1) = f(g_2)$ 」と「 $g_1 \equiv g_2 \pmod{\text{Ker}(f)}$ 」とは同値である。

上の定理はとても大事であるので、次回からも引き続き考えることになる。(実力のある諸君はこの時点で準同型定理 (NO.1 要約参照) の証明を完結できる筈である。試していただきたい。)

レポート問題

問題 9.1. $G = \mathbb{D}_4 = \langle a, b; a^4 = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ の部分群 $H = \{e, b\}$ について、

- (1) G の $\text{mod } H$ での左合同によるクラス分けをクラス分けの表を用いて書きなさい。
 (2) G の $\text{mod } H$ での右合同によるクラス分けをクラス分けの表を用いて書きなさい。ただし、 $x, y \in G$ が右合同であるとは、 $\exists h \in H$ があって、 $hx = y$ が成り立つときにいう。
 (3) G の元 s, t で、つぎの性質を同時に満たすものを見つけなさい。
 (i) $s \equiv a \pmod{H}$.
 (ii) $t \equiv a^2 \pmod{H}$.
 (iii) $st \not\equiv a^3 \pmod{H}$.