

## 代数学 IA NO.8 要約

群  $G$  の部分群  $H$  が与えられると、 $G$  自体のクラス分けが定まるのでした。

今日のテーマ 《群の、部分群による左剰余類集合は、いつ群になるか。》  
群の部分群による剰余集合が、「自然なやり方で」群になるには、その部分群が正規部分群である事を仮定するのが良い。

定理 8.1.  $G$  を群とし、 $H$  をその部分群とする。このとき、

- (1)  $G$  の任意の元  $g$  に対して、 $g$  の  $H$  を法とする左剰余類  $C(g)$  は

$$gH = \{gh; h \in H\}$$

と一致する。

- (2)  $C(g)$  ( $= gH$ ) と  $H$  とは元の個数が等しい。  
(3)  $G$  の位数  $|G|$  が有限ならば、 $G/H$  の元の個数  $\#(G/H)$  と  $H$  の位数  $|H|$  とはともに有限で、

$$|G| = \#(G/H)|H|$$

が成り立つ。

定義 8.1.  $G$  を群、 $K$  をその部分群とする。 $K$  が  $G$  の正規部分群であるとは、任意の  $g \in G$  と任意の  $h \in K$  とに対して、

$$ghg^{-1} \in K$$

が成り立つときに言う。

例 8.1. (正規部分群の例)

- (1) 可換群の部分群は正規部分群である。特に、 $\mathbb{Z}$  の部分群はすべて正規部分群である。  
(2) 有限巡回群  $C_n$  も可換群であるから、その部分群はすべて正規部分群である。  
(3) 二面体群  $\mathbb{D}_n = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$  の部分群  $\langle a \rangle$  は正規部分群である。

例 8.2. (正規部分群でない例)

- (1)  $\mathbb{D}_n$  の部分群  $\langle b \rangle$  は  $\mathbb{D}_n$  の正規部分群ではない。  
(2)  $n$  次対称群  $S_n$  の部分群  $S_{n-1}$  は  $S_{n-1}$  の正規部分群ではない。

定理 8.2. (重要)  $G$  を群、 $H$  をその部分群とする。 $G/H$  に次のような乗法を定めて群にしてやりたい。

$$\overline{a} \overline{b} = \overline{ab}$$

これが、代表元の取りかたによらずにうまく行って、 $G/H$  が実際に群になるためには、 $H$  が正規部分群である事が必要十分である。

定理 8.3.  $G$  を群、 $N$  をその正規部分群とする。このとき  $G$  の二つの元  $x, y$  に関する次の二つの条件は同値である。

- (1) ある  $n \in N$  があって、 $xn = y$  が成り立つ。  
(2) ある  $m \in N$  があって、 $mx = y$  が成り立つ。

すなわち、正規部分群でクラスわけする時には、「左」「右」をあまり気にしなくて良い。

## 発展

定理 8.4.  $G$  を群とし、その上の同値関係  $\sim$  が定まっているとする。 $G/\sim$  に 乗法を、

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} \quad (a, b \in G; \overline{a} \text{ 等は } a \text{ 等のクラスを表す。})$$

で定めたい。この乗法が代表元の取りかたによらずに定まるならば、

$$N = \{x \in G; x \sim e\}$$

は  $G$  の正規部分群となり、 $a \sim b$  と  $a \equiv b \pmod{N}$  とは同値になる。

## レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限: 次の講義の終了時まで。)

(I)  $m$  を正の整数とします。二面体群

$$\mathbb{D}_{5m} = \langle a, b; a^{5m} = e, b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$$

の、 $a^5$  で生成された部分群を求めなさい。さらに、これが  $\mathbb{D}_{5m}$  の正規部分群であるかどうかを調べなさい。

(II)  $\mathfrak{S}_3$  の、 $(1\ 2\ 3)$  で生成された部分群をここでは仮に  $A$  と書くことにします。 $A$  は、 $\mathfrak{S}_3$  の正規部分群であることを示しなさい。さらに、 $\mathfrak{S}_3/A$  はどのような群になるか、かけ算の表をつくって答えなさい。

(III) 《発展》に挙げた定理のうち、 $N$  が正規部分群であるという部分の証明を書きなさい。(ヒント: 次のステップの各々に説明をつければ良い。どれも「明らか」ではない。(もちろん他のやり方を考えてもよろしい。))

- $\overline{e}$  は  $G/\sim$  の単位元である。
- $a, b \in N$  ならば  $ab \in N$ 。(サービス:  $G/\sim$  の乗法が代表元の取りかたによらない事から、 $\overline{ab} = \overline{ee}$  でなければならない。)
- $\overline{a}$  の  $G/\sim$  での逆元は  $\overline{a^{-1}}$  である。
- $a \in N$  ならば  $a^{-1} \in N$ 。
- $a \in G, b \in N$  ならば  $aba^{-1} \in N$ 。