代数学 IA NO.6 要約

群とは、操作の集まりでした。群をうまく扱うためには、適当な「同一視」を行うと便利な場合があるのでした。ルービックキューブがそれなりに汚れてきても面の色の揃い方だけで区別したり、正 n 角形の頂点に複数の名前を与えて、$[k]_n = [l]_n$ は $k-l$ が n の倍数の時にする。等です。

今日のテーマ 《同値関係》

● <u>《同値関係》と《クラス分け》とは一つの現象を裏と表とから眺めたものである。</u>

定義 6.1 (同値関係の定義)**.** 集合 X が与えられているとする。 X に次のような条件を満たす「二項関係」 「$\sim$」 が定まっているとき、「$\sim$」 のことを同値関係と言う。

(0) 任意の $a, b \in X$ に対して、$a \sim b$ か、そうでないかがはっきりと決まっている。
(1) $a, b, c \in X$ が、$a \sim b, b \sim c$ を満たせば、 $a \sim c$ も成り立っている。
(2) 任意の $a \in X$ に対して、$a \sim a$ が成り立っている。
(3) $a, b \in X$ が、$a \sim b$ を満たせば、$b \sim a$ も成り立っている。

例 6.1. つぎの例はそれぞれ X 上の同値関係である。

(1) $X = \{$ 平面上の三角形 $\}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a と b とは <u>合同</u>。
(2) $X = \{$ 平面上の三角形 $\}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a と b とは <u>相似</u>。
(3) $X = \{$ 日本人 $\}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a と b とは名前が同じ。
(4) $X = \{$ 高知大生 $\}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a と b とは所属する学科が同じ。
(5) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ $a - b \in \mathbb{Z}$.

例 6.2. 次の例は X 上の同値関係ではない。

(1) $X = \{$ 日本人 $\}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ a と b とは友達である。
(2) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ $a \leq b$.

集合に同値関係を入れるということは、集合のクラス分けをする事と同じことになる。クラス分けの正確な定義は、次のようになる。

定義 6.2. 集合 X が与えられているとする。X のクラス分けが与えられている、というのは、次のような条件を満たす X の部分集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられているときに言う。

(1) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は <u>互いに交わらない</u>。すなわち、λ_1, λ_2 が異なる Λ の元ならば、

$$X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2} = \emptyset$$

がなりたつ。

(2) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は <u>X 全体を覆いつくす</u>。すなわち、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X$$

がなりたつ。(各 X_λ のことを「クラス」とか「類」とか呼ぶ。

定理 6.1. 集合 X が与えられているとする。このとき、

(1) X 上に同値関係 $\sim$ が与えられると、X のクラス分けが、次のようにして定まる。

(※) $$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ と } b \text{ とは同じクラスに属する.}$$

a と同値なものの全体からなる X の部分集合を $C(a)$ と書くと、X のクラス分けは、$\{C(a)\}_{a \in X}$ から同じものを省いたものである。

(2) 逆に、X 上のクラス分けが与えられているとき、(※) によって X 上に同値関係が定まる。

定義 6.3. 集合 X 上の同値関係 $\sim$ が与えられているとする。X のクラスの一つ一つをそれぞれ一つの元とみた集合を、X の $\sim$ による商集合と言い、$X/\sim$ で表す。対応 $x \mapsto [x]$ (x のクラス) を**自然な射影**と呼ぶ。

例 6.3. (1) 正の整数 n を一つ固定し、 $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow$ $a - b \in n\mathbb{Z}$ と定める。この場合、$X/\sim$ は前回解説した "拡張した番号をつけられた頂点の集合" と同一視される。

(2) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b \Leftrightarrow\ a - b \in \mathbb{Z}$. この場合、$X/\sim$ は円周と同一視される。

定理 6.2. (1) 集合 S から集合 T への写像 $f : S \to T$ が与えられているとする。このとき、

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により、同値関係が定まり、$S/\sim_f$ は $\mathrm{Image}(f)$ と一対一に対応する。

(2) 集合 X に同値関係 $\sim$ が定まっているとき、写像 $\pi : X \to X/\sim$ に対して上の対応で定まる X 上の同値関係 $\sim_\pi$ は元の $\sim$ と一致する。

レポート問題

(I) 日常生活に現れる簡単な集合 X とその上の同値関係 $\sim$ の例をあげ、その例において $X/\sim$ がどのようなものであるか述べよ。(条件の設定の仕方によっては同値関係と呼べるかどうか怪しいものもある。そのようなものについては、どこが弱点か、どのようにすれば改善するかも述べること。)