論理と集合要約 NO.10

第 10 回目の主題：$\boxed{\text{写像}}$

定義 10.1. (再) 実数 x に対して、x を超えないような整数のうち最大のものを $\lfloor x \rfloor$ と書く (floor of x と読む。)。例えば、

$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \quad \lfloor -3.14 \rfloor = -4,$$

である。また、任意の整数 n に対して、$\lfloor n \rfloor = n$ である。

問題 10.1. (再) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$ とおく。写像 $f : X \ni x \to 2x \in Y$ と $g : Y \ni x \to \lfloor x/2 \rfloor \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

上の例のように、$g \circ f = \mathrm{id}$ を満たすとき、g は f の**左逆写像**であるという。(g からみれば f は g の**右逆写像**である。このとき、問題 9.2 の結果により、g が全射で f が単射であるのがわかることに注意しておこう。)

問題 10.2. $g_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$g_1(n) = \begin{cases} n/2 & (n \text{ が偶数の時}) \\ 0 & (n \text{ が奇数の時}) \end{cases}$$

と定義すれば、問題 10.1 の f に対し $g_1 \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ が成り立つことを示しなさい。

問題 10.3. $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$f_1(n) = 2n + 1$$

と定義すれば、問題 10.1 の g に対し $g \circ f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ が成り立つことを示しなさい。

問題 10.4. (再) $X = \mathbb{C}[t]$ (複素数係数の t を変数とする多項式の全体のなす集合), $Y = \mathbb{C}[t]$ とおく。写像 $f : X \ni p \to \int_0^t p dt \in Y$ と $g : Y \ni p \mapsto \frac{d}{dt} p \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

$\boxed{\text{写像による集合の像、逆像}}$

定義 10.2. 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき、

(1) X の部分集合 A に対して、その f による**像** (**順像**とも言う) $f(A)$ を

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

で定義する。

(2) Y の部分集合 B に対して、その f による**逆像** $\overset{-1}{f}(B)$ を

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

により定義する。

逆写像と同じ記号 $\overset{-1}{f}$ を使っているけれども、<u>集合の逆像は f の逆写像が存在しない場合においても定義される</u>ということに注意しておこう。

問題 10.5. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $f([1, 2])$ を求めよ。
(2) $f([-3, -1])$ を求めよ。
(3) $f([2, 4] \cup [-3, -1])$ を求めよ。

(4) $f([2,4]) \cap f([-3,-1])$ を求めよ。
(5) $f([2,4] \cap [-3,-1])$ を求めよ。

問題 10.6. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $\overset{-1}{f}([1,2])$ を求めよ。

(2) $\overset{-1}{f}(\{1\})$ を求めよ。

(3) $\overset{-1}{f}(\{2\})$ を求めよ。

(4) $\overset{-1}{f}(\{-1\})$ を求めよ。

(5) $\overset{-1}{f}([-2,-1])$ を求めよ。

(6) $\overset{-1}{f}([1,2] \cup [3,4])$ を求めよ。

$\overset{-1}{f}$ は (見かけによらず) 集合論的には使いやすい。つまり、$\overset{-1}{f}$ はさまざまな集合算と可換である。

問題 10.7. 写像 $f : X \to Y$ に対して、次のことを示しなさい。

(1) 任意の $A_1, A_2 \subset Y$ に対して、$\overset{-1}{f}(A_1 \cap A_2) = \overset{-1}{f}(A_1) \cap \overset{-1}{f}(A_2)$.
(2) 任意の $A_1, A_2 \subset Y$ に対して、$\overset{-1}{f}(A_1 \cup A_2) = \overset{-1}{f}(A_1) \cup \overset{-1}{f}(A_2)$.
(3) 任意の $A \subset Y$ に対して、$\overset{-1}{f}(\complement A) = \complement(\overset{-1}{f}(A))$.
(4) Y の無限個の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、

$$\overset{-1}{f}\Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overset{-1}{f}(A_\lambda), \qquad \overset{-1}{f}\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overset{-1}{f}(A_\lambda).$$

問題 10.5 で見たように、f の像については逆像ほどなんでもアリというわけにはいかない。詳しくは集合論の本を見ればよいが、さしあたっては実例が現れた時にその都度考えるぐらいで十分だろう。