論理と集合要約 NO.7

第７回目の主題：$\boxed{\text{写像}}$

定義 7.1. 集合 X と Y が与えられているとする。X の各元 x に対して、Y の元 $f(x)$ がひとつづつ与えられているとき、X から Y への**写像** f が与えられているという。X のことを f の**始集合**、Y のことを f の**終集合**という。

x がどの元がどの元に行くかという情報とともに、X と Y を指定することが**大変重要**である。

この状況は次のように書くと便利である。

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f: X & \to & Y \\ \cup\!\!\!\!\cdot & & \cup\!\!\!\!\cdot \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}}$$

但し、行数がかかるので、次のように一行で済ましてしまうこともある。

$$f : X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

いずれの表記法でも、正しく書く習慣をつければ必ず X, Y が何かまで書くことができることに注意する。具体的には次の例を見よ。

例 7.2. つぎの各々はそれぞれ (別々の) 写像である。

(1) $f_1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$
(2) $f_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$
(3) $f_3 : \mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$
(4) $f_4 : \mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{>0}$
(5) $f_5 : \mathbb{Z} \ni n \mapsto 2n \in \mathbb{R}$
(6) $f_6 : \mathbb{Z} \ni n \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$

対応 $x \mapsto f(x)$ についてとくに言及する必要のない場合には、下記のように「写像 $f : X \to Y$」とか、「$X \xrightarrow{f} Y$」と省略して書くこともある。

定義 7.3. 写像 $f : X \to Y$ に対してその**グラフ**を

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | \ x \in X\} \subset X \times Y$$

で定義する。

問題 7.1. 例 7.2 の写像のそれぞれについてそのグラフを描け。

関数をそのグラフでもって定義することもできる。

定理 7.4. 集合 X, Y について次のことが言える。

(1) 任意の関数 $f : X \to Y$ のグラフ $\Gamma = \Gamma_f$ はつぎの性質 (G) を持つ。

性質 (G)：任意の $x_1 \in X$ に対して、「縦線集合」

$$\{x_1\} \times Y = \{(x_1, y) | \ y \in Y\}$$

と Γ との共通部分はちょうどひとつの元からなる。

(2) 逆に、$X \times Y$ の部分集合 Γ が性質 (G) を持つならば、Γ はある一つの写像 $f : X \to Y$ のグラフである。

言い換えると、X から Y への写像と $X \times Y$ の特別な部分集合を同一視することができる。この考え方をさらに一般化して、$X \times Y$ の部分集合を与えることで X から Y への「対応」や、「関係」という概念を定義することもできる。そのことについてはもっとあとで扱おう。

解析学で言えば、連続写像、微分可能写像、代数で言えば、準同型写像のように「... を満たす写像」を考えることは大変多いし、基本でもある。数学を学ぶ上で、そのようなものを構成する必要が生じることも多いだろう。そのさい、それが**写像であることをチェックするのは当然必要**であるし、場合によっては仕事の大半を占める。

問題 7.2. つぎの各々はそれぞれ写像であろうか。

(1) $g_1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{Z}$.
(2) $g_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.
(3) $g_3 : \mathbb{Q} \ni x \mapsto (x$ を既約分数で書いた時の分母の絶対値$) \in \mathbb{Z}$.
(4) $g_4 : \mathbb{Q} \ni x \mapsto (x$ を分数で書いた時の分母$) \in \mathbb{Z}$.
(5) $g_5 : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x$ を 10 進展開した時の小数第一位$) \in \mathbb{Z}$

写像が「うまく定義されているか」否かはいかに曖昧さが排除されているかに掛かっている場合がある。そのような場合には言葉を付け足して曖昧さを排除することにより写像の定義を完成できることがある。

◎全射、単射、全単射。

定義 7.5. 写像 $f : X \to Y$ が

(1) $\forall y \in Y \exists x \in X \quad (f(x) = y)$ を満たすとき、f は**全射**であるという。
(2) $\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$ を満たすとき、f は**単射**であるという。
(3) 全射かつ単射であるとき、f は**全単射**であるという。

全射、単射、全単射の判定には、X, Y としてどのようなものを考えているかが大変重要な意味を持つ。

問題 7.3. 例 7.2 の各々は全射、単射、全単射であるだろうか。

グラフの言葉で言えば、次のようなことになる。

定理 7.6. 写像 $f : X \to Y$ が,

(1) 単射であることは、任意の $y_1 \in Y$ にたいして、Γ_f と「横線集合」 $X \times \{y_1\}$ との共通部分がたかだか一点からなる (つまり、一点かもしくは空集合である) ことと同値である。
(2) 全射であることは、任意の $y_1 \in Y$ にたいして、Γ_f と横線集合 $X \times \{y_1\}$ との共通部分が少なくとも一点存在すること同値である。
(3) 全単射であることは、任意の $y \in Y$ にたいして、Γ_f と横線集合 $X \times \{y_1\}$ との共通部分がちょうど一点存在すること同値である。

タテヨコを逆転することにより (もしくは、簡単な論理的な議論により)、次のことが分かる。

定理 7.7. $f : X \to Y$ が全単射ならば、つぎのような性質を満たす写像 $\overset{-1}{f} : Y \to X$ がただひとつ存在する。

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \overset{-1}{f}(y)$$

この $\overset{-1}{f}$ のことを f の**逆写像**とよぶ。

問題 7.4. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 2x + 1 \in \mathbb{R}$ の逆写像を求めよ。