論理と集合要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{集合の和集合や共通部分 (2)、積集合}}$

問題 5.1. $2\mathbb{Z} \subset 5\mathbb{Z}$ だろうか。

問題 5.2. $2\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$ だろうか。

◎積集合

定義 5.1. 集合 X, Y に対して、

$$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**積集合**といい、 $X \times Y$ で書き表す。

もっと一般に、

定義 5.2. 集合族 $\{X_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$ に対して、

$$\{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}; x_\lambda \in X_\lambda\}$$

を $\{X_\lambda\}$ の**積集合**といい、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で書き表す。

積集合は「積の集合」では<u>ない</u>。そのことを強調するため、積集合のことを「デカルト積集合」とか「集合としての直積」と呼ぶこともある。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^3$ 等と略記する。

問題 5.3. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$, $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ とおくとき、$D_1 \subset B_1$ だろうか。

問題 5.4. $D_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1/2\}$, $B_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1/4\}$ とおくとき、$D_{1/2} \subset B_{1/2}$ だろうか。

問題 5.5. 正の実数 r に対して、$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < r\}$, $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$ とおくとき、$D_r \subset B_r$ だろうか。

問題 5.6. 前問に加えて、$E_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < r \text{ and } |y| < r\}$ とおくとき、 $B_r \subset E_r$ だろうか。

問題 5.7. 前問に続く。$E_r \subset D_r$ だろうか。また、 $E_r \subset D_{2r}$ だろうか。

問題 5.8.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n) = (0, +\infty)$$

であることを示しなさい。

問題 5.9.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

であることを示しなさい。

問題 5.10.

$$\bigcap_{\epsilon > 0} (-\infty, 1 + \epsilon) = (-\infty, 1]$$

であることを示しなさい。前回の問題 4.8 およびそのコメントは間違っていた. 上記がただしい。(Web 版は修正済み).

問題 5.11. 問題 5.5 と同じ記号を使うとき、

$$\bigcap_{\epsilon > 0} B_{1+\epsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

が成り立つことを示しなさい。

$v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ にたいし、そのノルムを

$$||v||=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

で定義する。このとき、$v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ にたいして、

$$||v+w||\le||v||+||w||$$

がなりたつ。(三角不等式。) このことの証明は内積の定義と性質を用いたほうが良いのでここでは省く。興味のある人は線形代数の教科書を見てみること。

一般に、$a\in\mathbb{R}^n$ と $r>0$ に対して、

$$B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n;||x-a||<r\}$$

(a を中心とする半径 r のボール。) とおく。

問題 5.12. $v\in\mathbb{R}^n$ のノルムを R とおくと、

$$B_r(v)\subset B_{(R+r)}(0)$$

が成り立つことを証明せよ。