微分積分学概論 AI 要約 NO.9

$\boxed{\text{関数の極限値}}$

定理 9.1. (再掲)[“教科書定理 10”] 極限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ と $\lim_{x\to x_0} g(x)$ がともに存在すると仮定する。このとき、次のことが成り立つ。

(1) $\displaystyle \lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(2) $\displaystyle \lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(3) $\displaystyle \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$.

(4) さらに、 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ と仮定すると、

$$\lim_{x\to x_0}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

数列の収束と関数の収束には次のような関係がある。

定理 9.2. x_0 の近くで定義された関数 f にたいして、次のことは同値である。

(1) f の $x\to x_0$ での極限が存在する。

(2) $a_n \to x_0$ で、 $a_n \neq x_0 (\forall n)$ なる任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ にたいして、$\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ はある値に収束する。

問題 9.1. 正の数 $\epsilon > 0$ が与えられているとする。このとき、次のような 正の数 δ を見つけなさい。

$$\forall b \left(|b-5| < \delta \implies (b\neq 0 \text{ and } \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon) \right)$$