代数学 III 要約 NO.14

代数関数体

No.12 で (2),3,4 次方程式の解法について述べた。これは $X^3+2X^2+3X+4\in\mathbb{Q}[X]$ のような具体的な多項式の根を求めると見ることもできるが、別の見方もできる。すなわち、(2 次方程式の場合で言えば) 多項式

$$X^2-aX+b$$

の係数 a,b を <u>不定元</u>(変数) とみて、そのような「普遍的な」2 次多項式の根として

$$\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

を考え、その特殊な場合として一般の 2 次の多項式を扱うという具合である。

定義 14.1. 体 k 上の n-変数多項式環 $k[X_1,X_2,\dots,X_n]$ の商体 (多項式の分数の形で書けるもの全体のなす体) を $k(X_1,X_2,\dots,X_n)$ と書き、体 k 上の **n-変数有理関数体**と呼ぶ。

定義 14.2. 体 k 上の n-変数有理関数体 の有限次代数拡大を**代数関数体**と呼ぶ。

例 14.3. 体 k 上の不定元 a,b をとって 2 変数有理関数体 $K=k(a,b)$ を考える。K 上の多項式 X^2-aX+b は K 上既約であって、その根の一つを x_1 とおくと、$L=K(x_1)$ は 2 変数代数関数体の例である。L は K のガロア拡大で、$\mathrm{Gal}(L/K)\cong C_2$ (2 次の巡回群).

例 14.4. 体 k 上の不定元 a,b,c をとって 3 変数有理関数体 $K=k(a,b,c)$ を考える。K 上の多項式 X^3-aX^2+bX+c は K 上既約であって、その根を x_1,x_2,x_3 とおくと、$L=K(x_1,x_2,x_3)$ は 2 変数代数関数体の例である。L は K のガロア拡大で、$\mathrm{Gal}(L/K)\cong\mathfrak{S}_3$ (3 個の元の対称群).

上の例は一般の次数の「普遍多項式」の場合にまで拡張できる。

命題 14.5. 体 k が 1 の 3 乗根 $1,\omega,\omega^2$ を元として含むとする。上の例の $K=k(a,b,c)$ と $L=K(x_1,x_2,x_3)$ を考えよう。

$$r_1=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3,\qquad r_2=x_1+\omega^2x_2+\omega x_3$$

とおくと、

(1) $M=K(r_1^3)$ は K と L の中間体であって、$r_1^3,r_2^3\in M$, $L=M(r_1)$.
(2) M は K の 2 次のガロア拡大で、 $\mathrm{Gal}(M/K)\cong C_2$.
(3) L は M の 3 次のガロア拡大で $\mathrm{Gal}(L/M)\cong C_3$.

ガロア拡大で、そのガロア群が巡回群であるものを**巡回拡大**と呼ぶ。上の命題は、「普遍的な」3 次方程式の分解体が巡回拡大の繰り返しで得られることを述べている。4 次方程式についても同様のことができる。

有理関数体が出てきたついでに、次のことについても言及しておこう。

命題 14.6. (非分離拡大の例) 標数 p の体 k が与えられたとする。(例えば、$k=\mathbb{F}_p$.) このとき、k 上の不定元 a をひとつとって $K=k(a)$ を考える。X^p-a は K 上既約であって、その根 α は K 上分離的ではない。

問題 14.1. $\mathbb{F}_3$ 上の多項式 X^3-1 を因数分解せよ。

問題 14.2. 上の命題 14.5 と同様の議論を 4 次方程式について展開せよ。(少なくとも、K と L にあたるのものの中間体の一つを見いだせ。)