解析学 IA NO.3 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《多変数関数の連続性と極限 (2)》「写像」と「関数」は同じ意味の言葉ではあるが、ニュアンスとしては「関数」といえば値集合として数集合のみを許すことが多い。今日はそんな「関数」に限らずもっと一般の「写像」の連続性も一緒に議論しよう。詳しくは位相空間論で勉強するはずである。

定義 3.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S から $\mathbb{R}^m$ の部分集合 T への写像 f が点 $P \in S$ で**連続**であるとは、

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \left(Q \in S \cap B_\delta(P) \implies d(f(Q), f(P)) < \epsilon\right)$$

を満たすときに言う。

f が S のどの点でも連続であるとき、f は**連続である**という。

$d(f(Q), f(P)) < \epsilon$ の部分は「$f(Q) \in B_\epsilon(f(P))$」と言い代えてももちろんよい。「連続性」という解析学的なことがらが「球の位置関係」という幾何学的なことがらに翻訳されていることに注意。

実際の関数の連続性は、基本的な関数の連続性を組み合わせてだすことがおおい。基本的な関数自身の連続性はとなると、これは結局上の定義に戻って証明することになる。

補題 3.1. 次の各写像は連続である。

(1) $f_+ : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$
(2) $f_- : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x - y \in \mathbb{R}$
(3) $f_\times : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$
(4) $\mathrm{inv} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$

補題 3.2. 集合 $S \subset \mathbb{R}^l, T \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$ と写像 $f : S \to T, g : T \to U$ が与えられているとする。f が $P \in S$ で連続で、かつ g が $f(P) \in T$ で連続ならば、合成写像 $g \circ f$ も P で連続である。とくに、連続写像の合成写像は連続である。

連続写像を組み合わせて新しい写像を作るためには、幾つかの「退屈な写像」(包含写像、射影など) について連続性を言わなければならない。ここでそれをやると二度手間になってしまううえに、位相空間の知識なしには中途半端にしかできないので、それらはおとなしく位相空間論に任せよう。

◎ ランダウの o.

定義 3.2. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X 上の関数 a, b にたいして、

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \quad (Q \in B_r(P) \cap X \implies |a(Q)| \le \epsilon |b(Q)|)$$

が成り立つとき、

$$a(Q) = o(b(Q))$$

と書いて、a は b に比べて**無視できる** (ほど小さい) という。

上の定義の式は、ほぼ、

$$\lim_{Q \to P} \left|\frac{a(Q)}{b(Q)}\right| \to 0$$

と同値である。ただ、$b = 0$ の点で困るから、上の形にしてあるのである。

上の記法を用いると、f が P で連続であることは、

$$f(Q) = f(P) + o(1)$$

と同値である。

※レポート問題

(期限：次の講義の終了時まで。)

問題 3.1. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to (x^2, x^3 + y^3) \in \mathbb{R}^2$ が連続であることを示しなさい。