# 解析学 IA 演習 NO.3

**問題 3.1** ( $\mathbb{R}^n$ が位相空間の公理をみたすこと)**.** (各 1 点。ただし順に解くこと。)

(1) $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U, V$ の共通部分 $U \cap V$ は開集合であることを示しなさい。

(2) $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U, V$ の和集合 $U \cup V$ は開集合であることを示しなさい。

(3) $\mathbb{R}^n$ の無限個の開集合 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

は開集合であることを示しなさい。

**問題 3.2.** $\mathbb{R}^n$ の開集合の列 $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ で、その共通部分

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$$

が開集合ではない例を挙げなさい。

**問題 3.3** (三角不等式の導出)**.** (各 1. 順に解くこと。) $n$ 次元のベクトル $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ とにたいし、その内積を

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j$$

で定義する。このとき、

(1) $f(t) = \langle tv + w, tv + w \rangle$ は $t$ の二次式であることを示しなさい。(その係数を $\langle v, v \rangle, \langle v, w \rangle$ 等を用いて書きなさい。

(2) $f(t)$ の最小値が 0 以上であることと、二次式の最大、最小の知識を用いて、

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

を示しなさい。

(3) $\sqrt{\langle v, v \rangle}$ のことを $||v||$ と書くことにすると、

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$

が成り立つことを前小問を使って示しなさい。(三角不等式)

今回の以下の問題は、連続性の定義は $\epsilon$-$\delta$ 論法を用いて行い、それを用いて解答すること。すなわち、$f$ が $P$ で連続であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad (d(P, Q) < \delta \implies d(f(P), f(Q)) < \epsilon)$$

で定義することにする。単に「連続」といえば、「定義域の各点で連続」の意味である。

**問題 3.4.** $S$ は $\mathbb{R}^m$ の部分集合、$T$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であるとする。$f : S \to T$ が連続で、 $S$ の点列 $P_{j_{j=1}}^{\infty}$ が $S$ の点 $P$ に収束するならば、点列 $\{f(P_j)\}_{j=1}^{\infty}$ は $f(P)$ に収束することを示しなさい。

**問題 3.5.** ノルム関数

$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto ||v||(= d(v, 0)) \in \mathbb{R}$$

は連続であることを示しなさい。

**問題 3.6.** (各 1. ただし順に解くこと。) 直積集合 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する。このとき、

(1) $\mathbb{R}^n$ の距離関数を $d$, $\mathbb{R}^{2n}$ の距離関数を $d_1$ と書くと、

$$d_1((P_1, P_2), (Q_1, Q_2)) = \sqrt{d(P_1, Q_1)^2 + d(P_2, Q_2)^2}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) 距離関数

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (P_1, P_2) \mapsto d(P_1, P_2) \in \mathbb{R}$$

は連続であることを示しなさい。

**問題 3.7.**

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto |x| + |y|$$

は連続であることを示しなさい。

**問題 3.8.** $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ を成分を全て並べて $\mathbb{R}^6$ と同一視する。このとき、行列とベクトルのかけ算で定まる写像

$$M_4(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \ni \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

は連続であることを示しなさい。

**問題 3.9.** $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + 5y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき。} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき。} \end{cases}$$

で定義する。この $f$ は原点 $(0, 0)$ で連続だろうか。

**問題 3.10.** $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき。} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき。} \end{cases}$$

で定義する。この $f$ は原点 $(0, 0)$ で連続だろうか。