代数学 I NO.13 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《環の直積分解・１０５減算》
一つの環を環の直積に分解すると楽なことがある。
環を直積分解するときには、対応する射影を求めるのがポイントになる。

定義 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、R_1, R_2 の環としての直積とは、デカルト積集合 $R_1 \times R_2$ の上に、次のような演算を定義したものである。

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$$

R_1 と R_2 の環としての直積を、普通 $R_1 \times R_2$ と書く。

補題 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、

(1) $R_1 \times R_2$ は環になる。
(2) R_1, R_2 の単位元 がそれぞれ $1_{R_1}, 1_{R_2}$ とすると、$R_1 \times R_2$ の単位元は $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ である。
(3) R_1, R_2 がともに可換ならば、$R_1 \times R_2$ も可換である。

環の直積分解においては、二つの基本的な元が重要な役割を果たす。

補題 13.2. (1) R_1, R_2 は単位元をもつ可換環であるとする。このとき $R_1 \times R_2$ の元 e_1, e_2 を、$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ によって定めると、次のことが成り立つ。

(★) $$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1, e_1 e_2 = 0$$

(2) R は単位元をもつ可換環であるとする。もし R の元 e_1, e_2 で、(★) を満たすものが存在すれば、R は $R/(e_1) \times R/(e_2)$ と 同型になる。

上の補題により、環を直積分解したいときには、(★) を満たす元 e_1, e_2 を探せばいいことがわかる。e_1, e_2 のことを (直積分解に対応する) 射影と呼ぶ。

命題 13.1. 環 R の元 a, b, x, y が

$$ax + by = 1$$

を満たすとき、

$$R/(ab) \cong R/(a) \times R/(b)$$

で、対応する射影は $R/(ab)$ における by, ax のクラスである。

例 13.1 (環の直積分解の具体例)**.**

(1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型である。
(2) $\mathbb{C}[X]/(X^2 - X)$ は $\mathbb{C}[X]/(X) \times \mathbb{C}[X]/(X-1)$ と同型である。

※三つの環 R_1, R_2, R_3 の直積も二つの場合と同様に定義される。環 $(R_1 \times R_2) \times R_3$ は $R_1 \times R_2 \times R_3$ と同型である。４つ以上でも同様。

古典的な 105 減算は

$$\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

をもとにしている。

※レポート問題
つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限:次の講義の終了時まで。)

(I) 1000 で割ると 17 余り、 1003 で割ると 34 余るような整数 n の例を一つ求めよ (途中の計算はある程度省略してよい。ただし求めた方法は書いておくこと。)
(II) $X^3 - 1$ で割ると $X + 1$ 余り、$X^2 + 2$ で割ると X 余るような $\mathbb{C}[X]$ の元 $p(X)$ の例を一つ求めよ、。