代数学 IB NO.8(試験)

- 解答用紙の右上には必ず学生番号を記入すること。
- 持ち込みは何でも可。ただし、次のものを除く。
  - 通信機能をもつもの。
  - 他人の迷惑になるもの。

(今日は準同型定理の周辺にでてくる話題の確認である。下の解答で準同型定理自身を用いる場面はおそらくないだろう、というか、用いずに解決すること。)

問題 8.1. 環準同型 $\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ が

$$\varphi(X) = 10$$

を満たしたとする。このとき、

(1) $\varphi(X^2)$ を求めよ。(答のみでよい。)
(2) $\varphi(8X^3 + 2X + 1)$ を求めよ。(答のみでよい。)
(3) $\varphi(p) = 356$ となる $p \in \mathbb{Q}[X]$ の例を 3 つ挙げなさい。ただし、そのうち一つは 3 次以上の式であるようにすること。(答えと、簡単な確かめ算のみでよい。)
(4) $\mathrm{Ker}(\varphi) \supset (X - 10)\mathbb{Q}[X]$ を証明しなさい。
(5) $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を $(X - 10)$ で割った商を $q(X)$, 余りを r とおく。(r は 1 次式でわった余りだから、0 次式、つまり、定数 ($\mathbb{Q}$ の元)) このとき p を q, r を用いて表しなさい。(説明不要。)
(6) 任意の $p \in \mathbb{Q}[X]$ にたいして、$\varphi(p) = p(10)$ がなりたつことを示しなさい。
(7) 剰余環

$$\mathbb{Q}[X]/(X - 10)\mathbb{Q}[X]$$

での多項式 $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ のクラスは有理数 $p(10)$ のクラスと等しいことを示しなさい。

用語と注意。

- $\mathbb{Q}$ とは、有理数の全体のなす集合である。この集合は通常の和、差、積、商について体をなし、**有理数体**と呼ばれる。

$$0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots, 5/7, -37/12, \dots$$

がこれに属する。

- $\mathbb{Q}[X]$ とは、$\mathbb{Q}$ の元を係数に持つ多項式の全体のなす集合であり、これには

$$X^2, 8X^3 + 2X + 1, X - 10, -7X^3 + 123/57X^2 + 3/2X - 1/127$$

等々が属する。この集合も通常の和、差、積について環をなし、$\mathbb{Q}$ 上の**一変数多項式環**と呼ぶ。

- 環 A から環 B への写像 φ は、和と積を保ち、単位元を単位元に写すとき**環準同型**と呼ばれる。

(★) A, B がともに有理数のなす環を部分環として含むなら、任意の環準同型 $\varphi : A \to B$ について $\varphi(r) = r$ が任意の有理数 r に対して成り立つ。

ということを講義で説明したので、その部分は今回は証明無しに使ってもよい。(時間に余裕があれば証明も書くともっとよいが...) ただし、どこで使ったかがわかるような答案にすること。

解答

(1) $\varphi(X^2) = \varphi(X \cdot X) = \varphi(X) \cdot \varphi(X) = 10 \cdot 10 = 100.$

(2) $\varphi(8X^3 + 2X + 1) = 8\varphi(X)^3 + 2\varphi(X) + 1 = 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 1 = 8021.$

(3)

- 356 (定数多項式)
- $3X^2 + 5X + 6$
- $\frac{1}{10}(3X^3 + 560)$
- $\frac{356}{2008}(2X^3 + 8)$

などなど。

(4) $(X - 10)\mathbb{Q}[X]$ から任意の元 a をとってくると、それは

$$a(X) = (X - 10)b(X) \qquad b \in \mathbb{Q}[X]$$

という形をしている。したがって、

$$\varphi(a) = \varphi(X - 10) \cdot \varphi(b) = (\varphi(X) - 10) \cdot \varphi(b) = 0 \cdot \varphi(b) = 0.$$

(5)

$$p(X) = (X - 10)q(X) + r$$

(6)

$$\varphi(p) = \varphi((X - 10))\varphi(q) + \varphi(r) = \varphi(r) \overset{(\bigstar)}{=} r.$$

他方で、

$$p(10) = (10 - 10)q(10) + r = r.$$

ゆえに、 $\varphi(p) = p(10)$.

もしくは、

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

とかいて、

$$\begin{aligned}
&\varphi(p) \\
=&\varphi(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) \\
=&\varphi(a_n)\varphi(X)^n + \varphi(a_{n-1})\varphi(X)^{n-1} + \varphi(a_{n-2})\varphi(X)^{n-2} + \dots \\
&\quad + \varphi(a_2)\varphi(X)^2 + \varphi(a_1)\varphi(X) + \varphi(a_0) \\
\overset{(\bigstar)}{=}&a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
=&p(10)
\end{aligned}$$

としてもよい。

(7) (6) の前半に述べたように、

$$p(X) - p(10) = (X - 10)q(X)$$

(記号は (6) と同じものを使った。) だから、$p(X)$ と $p(10)$ の $\mathbb{Q}[X]/(X-10)\mathbb{Q}[X]$ でのクラスは等しい。