微分積分学概論 AI 要約 NO.2

数列と収束の定義

●定義とは、 言葉の使い方のとりきめのことである。数学では、どのような言葉も、そのような取り決めなしで使われることはない。(ただし、「整数」「有理数」、「和」、「積」などの言葉をきちんと定義するのは手間がかかる。それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。(端的に言えば、整数は帰納法を援用して定義し、有理数は整数の「商」 m/n に適当な「等しいかどうかの判定規則」と定義する。) それらについて詳細に定義するのはこの講義では控える。実数は有理数の極限として定義するのだが、今日はその「極限」の話題である。)

●$\forall$ と $\exists$ とはなにか。

$$\forall x....$$

は、「どんな x に対しても、 .... がなりたつ」という意味。

$$\exists x....$$

は、「なにかある一つの x に対しては、 .... がなりたつ」という意味で用いる。

正の整数の全体のことをこの講義では $\mathbb{Z}_{>0}$ と書く。数列とは、数学的には次のように定義できる。

定義 2.1. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、 $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことである。

数列が「収束する」ということの厳密な定義をしよう。それには、絶対値を用いる。

定義 2.2.

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(ただし平方根は 0 以上のほうを選ぶ。)

上の平方根を使う定義は次のように高次元の空間にも容易に拡張できるという長所を持つ。

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$$

定義 2.3. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に収束するとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N (n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

がなりたつときに言う。

この定義が使いこなせるようになれば、この講義の目標の 80% は達せられたと言って良い。

例題 2.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 a_n は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

問題 2.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 a_n は何かある値に収束するだろうか。上の定義に基づいて理由を述べて答えなさい。