日本語技法 NO.5

$\forall$ と $\exists$ (その 2)

> $$\forall x P(x)$$
> **を証明するには、全ての x について一斉にチェックする必要がある。(したがって、一般には何らかの巧妙な「多くのモノをさばく」テクニックが必要になる。)**

例: $\forall z \in \mathbb{Q}_{>0}((4 > z^2) \Leftrightarrow (2 > z))$ **は正しい。なぜなら、<u>任意の</u> 正の有理数 z に対して、**

$$4 > z^2 \Leftrightarrow (2-z)(2+z) > 0 \Leftrightarrow 2-z > 0 \Leftrightarrow 2 > z$$

だからである。

> $$\exists x P(x)$$
> **を証明するには、一つで良いから例をあげれば良い。このときは、できるだけ具体的な例がよい。**

例: $\forall z \in \mathbb{Q}_{>0}((3 > z^2) \Leftrightarrow (2 > z))$ **は正しくない。すなわち、**

$$\exists z \in \mathbb{Q}_{>0}((3 > z^2) \not\Leftrightarrow (2 > z))$$

である。なぜなら、正の有理数 $z = 1.8$ を考えると、$3 > 1.8^2$ ではない $(1.8^2 = 3.24)$ のに $2 > 1.8$ だからである。

一般に、 $\forall x P(x)$ の否定は $\exists x(\neg P(x))$ であり、$\exists x P(x)$ の否定は $\forall x(\neg P(x))$ である。したがって、例えば

$$(\neg(\forall x \exists y \forall z P(x,y,z))) = (\exists x \forall y \exists z(\neg P(x,y,z)))$$

という具合に、$\forall, \exists$ を含んだ命題の否定は非常に簡単かつ形式的に得ることができる。

議論が複雑になってきたように感じられたら、 いったん記号で主張を書いてみて整理するとわかりやすくなることが多い。

また、下の問題のように、幾つかに区切って考えるのも一法である。

その前に一つ注意をしておこう。

命題 5.1. 一般に、正の実数 a, b に対して

$$\forall z \in \mathbb{Q}_{>0}((a > z^2) \Leftrightarrow (b > z))$$

が成り立つのは $a = b^2$ のときで、しかもそのときに限る。

問題 5.1. この問題では $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明なしに用いて良い。以下に挙げるそれぞれの命題は真だろうか、それとも偽だろうか。それぞれ理由を述べて答えなさい。

(1) $\exists y \in \mathbb{Q}_{>0} \forall z \in \mathbb{Q}_{>0}((3 > z^2) \Leftrightarrow (y > z))$
(2) $\forall x \in \mathbb{Q}_{>0} \exists y \in \mathbb{Q}_{>0} \forall z \in \mathbb{Q}_{>0}((x > z^2) \Leftrightarrow (y > z))$