

環の直積分解

問題 11.1. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ の元を全て挙げなさい。

問題 11.2. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ の元を全て挙げなさい。

問題 11.3. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ であることを示しなさい。

問題 11.4. l, m を互いに素な正の整数とし、

$$f: \mathbb{Z}/lm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

を

$$f([x]_{lm}) = ([x]_l, [x]_m)$$

で決める。このとき、

- (1) f はうまく定義されていることを示しなさい。
- (2) f は環準同型であることを示しなさい。
- (3) f の核はどうなるか？
- (4) $\mathbb{Z}/lm\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の元の個数をそれぞれ言いなさい。
- (5) $f([x]_{lm}) = ([1]_l, [0]_m)$ を満たす整数 x が存在することを示しなさい。
- (6) 上の x にたいして、

$$x = k_1l + 1 = k_2m$$

なる整数 k_1, k_2 が存在することを示し、そのことから、

$$al + bm = 1$$

を満たす l, m が存在することの証明を与えなさい。

- 問題 11.5. (1) $\mathbb{C}[X]$ のなかの元 $f(X)$ で、 $3X$ で割ると 1 余り、 $5X^2 - 1$ で割ると $X + 3$ 余るようなものの例を一つ挙げなさい。
- (2) 上のような $f(X)$ を全て求めなさい。