代数学演習 I 問題 NO.5

イデアルの例とイデアルによる剰余環 (2), 行列算編

問題 5.1. I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとします。この時、

(1) a, b が I の元で、a が正の数ならば、b を a で割った余り r も I の元であることを示しなさい。
(2) $I = 0$ のときを除くと、I の元の中で正で最小のものが存在します。これを a_0 とおくと、I の任意の元は a_0 で割り切れることを示しなさい。
(3) $I = a_0\mathbb{Z}$ を示しなさい。

問題 5.2. I を $\mathbb{C}[X]$ のイデアルとします。この時、

(1) f, g が I の元で、f が 0 でないならば、g を f で割った余り r も I の元であることを示しなさい。
(2) $I = 0$ のときを除くと、I の元の中で次数が最小のものが存在します。これを f_0 とおくと、I の任意の元は f_0 で割り切れることを示しなさい。
(3) $I = f_0\mathbb{C}[X]$ を示しなさい。

問題 5.3. (1) $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群は全て $\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示しなさい。
(2) $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群をすべて求めなさい。
(3) $(\mathbb{C}[X], +)$ の部分群で、$\mathbb{C}[X]$ のイデアルではないものの例を挙げなさい。

問題 5.4. $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (1 の三乗根) とします。この時、

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega^2 = \{a + b\omega + c\omega^2; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{C}$ の部分環であることを示しなさい。(記法に関する注意) この環は、$\mathbb{Z}$ に、ω を付け加えた環になっている。そこで、この環のことを、$\mathbb{Z}[\omega]$ とかく。

問題 5.5. (1) $\mathbb{Z}[\omega]$ (前問参照) の単数群を求めなさい。
(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{3}$ の単数群を求めなさい。

問題 5.6. a を複素数とします。このとき、

(1) 一変数多項式 $f(X)$ を $X - a$ で割ったときの余りは $f(a)$ であることを示しなさい。
(2) $\mathbb{C}[X]/(X - a)\mathbb{C}[X]$ のすべての元は、ある複素数 c (の同値類) と等しいことを示しなさい。

環 R に対して、その元を成分にもつ行列を考えることができ、通常の意味の和、差、積が (サイズがあっているという条件のもとで) 定義されて、一年生で習う線形代数のかなりの部分がそのまま正しい。

$$M_n(R) = \{R \text{ の元を成分にもつ } n \times n \text{ 行列}\}$$

とおくと、これは (可換ではない) 環である。その単位元は 1_n (n 次の単位行列).

問題 5.7. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ **の元を成分にもつ行列の積**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

を計算し、できるだけ簡単な形、すなわち各成分の絶対値が 14 **以下の整数によって表されている形になるように直しなさい。**

問題 5.8. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ **の元を要素にもつ行列**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.9. $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ **の元を要素にもつ行列**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.10. $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ **の元を要素にもつ行列**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

(**今回の以下の問題では行列式やトレースの性質を自由に用いて良い。**)

問題 5.11. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ **の元を要素にもつ行列**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列は存在するだろうか。理由を挙げて答えなさい。(**ヒント**:A **の逆行列** B **があったとする。**$AB = 1_3$ (3 **次の単位行列**). **両辺の 行列式をとると**...)

問題 5.12. **どんな整数** n **に対しても、**

$$AB - BA = 1_n$$

をみたす行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ **は存在しないことを示しなさい。**(**ヒント**: **トレース**)

問題 5.13. **素数** p **について、**$A, B \in M_p(\mathbb{F}_p)$ **で、**

$$AB - BA = 1_p$$

を満たすものの例を挙げなさい。(**かなり難問である。**$p = 3, 5$ **のときにまず試してみると良いかも知れない。**)