代数学演習 I 問題 NO.2

環と体の定義とその周辺編 (2)

注意 これからは、とくにことわらない限り、単位元をもつ環のみを扱う。「環」といえば、単位元を持つ環と解釈していただきたい。(単位元の存在がとくに重要な時には、一応ことわる。) ただし、積が可換であるとはまだ仮定しない。

問題 2.1. $\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z}=\{a+b\sqrt{-1}; a,b\in\mathbb{Z}\}$ は環となることを示しなさい。($\sqrt{-1}$ は虚数単位をあらわす記号です。)

問題 2.2. 単位元 1 を持つ環 R の元 x,y,z にたいして、

$$xy=1 \quad (\text{すなわち } y \text{ は } x \text{ の右逆元である。})$$
$$zx=1 \quad (\text{すなわち } z \text{ は } x \text{ の左逆元である。})$$

が成り立つとき、$z=y$ であって、

$$xy=yx=1 \quad (\text{すなわち } y(=z) \text{ は } x \text{ の逆元である})$$

が成り立つことを示しなさい。

定義 2.1. 単位元の存在する環 R において、逆元が存在するような元のことを、R の可逆元とか、単元、あるいは単数といいます。

問題 2.3. R を単位元の存在する環とします。R の可逆元全体 $R^\times$ は群をなすことを示しなさい。

定義 2.2. 前問の $R^\times$ のことを R の単数群といいます。

問題 2.4. $\mathbb{Z}$ の単数群を求めなさい。

問題 2.5. $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-1}$ の単数群を求めなさい。

問題 2.6. $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{-1}=\{a+b\sqrt{-1}; a,b\in\mathbb{Q}\}$ は体となることを示しなさい。

定義 2.3 (部分環の定義). R が単位元をもつ環であるとする。R の部分集合 S が R の部分環であるとは、S が次の条件を満たす時にいう。

(1) S は R の足し算、かけ算を流用することにより環になっている。
(2) S は R の単位元を元として持つ。

上の条件のうち、(1) が本質的部分であり、(2) は冒頭で述べた注意に沿うための技術的条件である。ただし、(2) をぬかしてしまうと理論は見かけ上かなり違った形になるので単位元のない環を扱う時(がもしあればその時) には注意が必要である。

問題 2.7. 次のものは複素数全体のなす環 $\mathbb{C}$ の部分環であるか、理由をつけて答えなさい。

(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$.
(2) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z}=\{x+\sqrt{-1}y; x,y\in\mathbb{Z}\}$.
(4) 複素数を成分にもつ二次行列全体の集合 $M_2(\mathbb{C})$.

問題 2.8. (Web 版のみ) $\mathbb{C}$ の部分環 S が、$1, \sqrt{3}+\sqrt{5}$ を元として持っているとします。この時、$2\sqrt{15}, 4\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ も S の元であることを示しなさい。

定義 2.4. 単位元をもつ可換環 R が

$$ab = 0 (a, b \in R) \implies a = 0 \text{ or } b = 0$$

を満たす時、R を整域とよぶ

問題 2.9. $M_2(\mathbb{C})$ の部分集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} k+2l & 0 \\ 0 & k+3l \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{C} \right\}$$

は加法、減法、乗法について閉じていることを示し、これが単位元をもつ可換環であることを言いなさい。さらに、この環は整域ではないことを示しなさい。

問題 2.10. R が可換環 S の部分環であるとき、R も可換環になり、さらに S が整域であれば R も整域であることを示しなさい。

問題 2.11. 実数を成分に持つ n-次正方行列のなす集合 $M_n(\mathbb{R})$ は通常の算法によって環になることを定義に沿って説明しなさい。

問題 2.12. $M_n(\mathbb{R})$ の元 A が零因子である必要十分条件は $\det(A) = 0$ であることを示しなさい。

問題 2.13. 環 R の元 c がある正整数 n により $c^n = 0$ となるとき、c を巾零元と言います。 R が単位元 1 を持ち、c が R の巾零元ならば、$1 - c$ は R の単元となることを示しなさい。

問題 2.14. 有限個の元しか持たない整域は、体となることを示しなさい。

問題 2.15. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R (つまり、$\mathbb{Q} \subset R \subset \mathbb{C}$) が $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を元として含むとき、$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ も R の元であることを示しなさい。

問題 2.16. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R が $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ を元として含むとき、$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ も R の元であることを示しなさい。

問題 2.17. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R について、次の二つの条件は同値であることを示しなさい。

(1) $\sqrt{3} + \sqrt{7} \in R.$
(2) $\sqrt{3} \in R$ かつ $\sqrt{7} \in R.$

問題 2.18. 前問で、R が $\mathbb{Q}$ を部分環として含む、という条件を外しても同様のことが言えるだろうか。正しいなら証明し、間違っているなら反例をあげなさい。

問題 2.19. $\mathbb{Q}$ を部分環として含むような $\mathbb{C}$ の部分環 R で、体でないようなものは存在するだろうか。(難問である。この問題については大枠が示せれば良い。)

問題 2.20.

(1) $S = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} + \mathbb{Z}\sqrt{3} = \{k + l\sqrt{2} + m\sqrt{3}; k, l, m \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{C}$ の部分環だろうか？
(2) S を含む、$\mathbb{C}$ の部分環で、最小のもの (つまり、S で生成される $\mathbb{C}$ の部分環) はなにか？