今日のテーマ 《環の直積分解・１０５減算》
一つの環を環の直積に分解すると楽なことがある。
環を直積分解するときには、対応する射影を求めるのがポイントになる。

定義 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、R_1, R_2 の環としての直積とは、デカルト積集合 $R_1 \times R_2$ の上に、次のような演算を定義したものである。

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$$

R_1 と R_2 の環としての直積を、普通 $R_1 \times R_2$ と書く。

補題 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、

(1) $R_1 \times R_2$ は環になる。
(2) R_1, R_2 の単位元 がそれぞれ $1_{R_1}, 1_{R_2}$ とすると、$R_1 \times R_2$ の単位元は $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ である。
(3) R_1, R_2 がともに可換ならば、$R_1 \times R_2$ も可換である。

例 13.1 (環の直積分解の具体例).

(1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型である。
(2) $\mathbb{C}[X]/(X^2-X)$ は $\mathbb{C}[X]/(X) \times \mathbb{C}[X]/(X-1)$ と同型である。

環の直積分解においては、二つの基本的な元が重要な役割を果たす。

補題 13.2. (1) R_1, R_2 は単位元をもつ可換環であるとする。このとき $R_1 \times R_2$ の元 e_1, e_2 を、$e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ によって定めると、次のことが成り立つ。

$$(\bigstar) \qquad e_1^2=e_1, e_2^2=e_2, e_1+e_2=1, e_1e_2=0$$

(2) R は単位元をもつ可換環であるとする。もし R の元 e_1, e_2 で、$(\bigstar)$ を満たすものが存在すれば、R は $R/(e_1) \times R/(e_2)$ と 同型になる。

上の補題により、環を直積分解したいときには、$(\bigstar)$ を満たす元 e_1, e_2 を探せばいいことがわかる。e_1, e_2 のことを (直積分解に対応する) 射影と呼ぶ。
※三つの環 R_1, R_2, R_3 の直積も二つの場合と同様に定義される。環 $(R_1 \times R_2) \times R_3$ は $R_1 \times R_2 \times R_3$ と同型である。４つ以上でも同様。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) 1000 で割ると 12 余り、 1003 で割ると 34 余るような整数 n の例を一つ求めよ (途中の計算はある程度省略してよい。ただし求めた方法は書いておくこと。)
(II) X^3+1 で割ると $X+1$ 余り、X^2+2 で割ると X 余るような $\mathbb{C}[X]$ の元 $p(X)$ の例を一つ求めよ、。
(III) a,b,c は、そのうちのどの二つも相異なるような複素数とし、$\mathbb{C}[X]$ の元 $p(X)$ を $X-a, X-b, X-c$ で割ったときの余りがそれぞれ e,f,g $(\in \mathbb{C})$ であったとする。このとき、p を $(X-a)(X-b)(X-c)$ で割った余りを求めよ。(答えはある程度きれいな形にしておけば無理に展開しなくてもよい。)