$\boxed{\text{今日のテーマ}}$

《ユークリッド環は単項イデアル環であること》

前々回、次の定理およびその周辺が残っていたので、今回はその解説である。

定理 10.1. ユークリッド環は単項イデアル環である。

次回の準備のために、次のことも証明しておこう。

補題 10.1. 単項イデアル環 R のイデアルの増大列

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots$$

は必ずどこかで止まる。すなわちある N があって、

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$$

がなりたつ。

注意:

$\mathbb{Z}$ のイデアルの減少列

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq I_4 \supsetneq \dots$$

の例ならたくさんある。例えば

$$(2) \supsetneq (2^2) \supsetneq (2^3) \supsetneq \dots$$

や

$$(2) \supsetneq (3!) \supsetneq (4!) \supsetneq \dots$$

等など。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限:次の講義の終了時まで。)

(I) $\mathbb{Q}[X]$ の元

$$f(X) = X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 2X - 5,$$
$$g(X) = X^5 + X^4 - 2X + 1,$$
$$h(X) = X^5 + 3X^4 + 6X^3 + 2X^2 + 2X - 5,$$

に対して、

イデアル

$$(f, g, h)$$

を簡単な形に直しなさい。(理由も述べること。)