日本語技法 NO.3

and, or, not と「ならば」

数学では、幾つかの、真なる命題(公理)から出発して、一定の推論規則を使って他の命題(補題や定理)を導き出す。

(推論規則は、大変易しいが、ときとして日常での推論とはずれることがある。これは主として、日常生活ではよく行なわれる「含意」とか「行間を読む」といったものを数学では極力排していることによる。すなわち、正しい証明を読めば(間違わない限りは、)誰でも同じ結論にたどり着けるようにしてある。)

既存の命題から、新しい命題を生み出すための基本的な道具が、「and, or, not」である。その説明のために、まずつぎの定義をしておく。

定義 3.1 (真理値). 命題の真理値を、つぎのように定める。

(1) 命題 P が正しい(真である)とき、その真理値は 1 であると定める。
(2) 命題 P が正しくない(偽である)とき、その真理値は 0 であると定める。

定義 3.2. 命題 P が与えられていて、P の真理値は p であるとする。このとき、「**not** P」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、$1-p$ である。

定義 3.3. 命題 P, Q が与えられていて、P の真理値は p, Q の真理値は q であるとする。このとき、

(1) 「P**and** Q」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、pq である。
(2) 「P**or** Q」なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、$\max(p,q)$ である。

定義 3.4. 命題 P, Q が与えられていて、P の真理値は p, Q の真理値は q であるとする。このとき、

「$P \Longrightarrow Q$」(「P ならば Q」と読む。)なる命題をあらたにつくっても構わない。この命題の真理値は、「(not P) or Q」と同じである。

上の三つは、数学の推論の仕方の基本的な取り決めである。「or」と「ならば」の使い方はとくに注意が必要である。日常語としては、これらの語を上記以外の使い方で用いることもあるが、「議論を明確にする」ために上のようにきめてあるわけだ。

かけ算における九九の表や、筆算のように、真理値についても表をつくって理解の助けにすることがある。これを真理表という。形式は、どのようなものでも良いわけだが、例えばつぎのようにつくる。

0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

上の表の一番右の欄が「$P \implies Q$」の真理値を表している。

問題 3.1. $P, Q, P \implies Q$, not$(P \implies Q)$ の真理値を書き込んで、下の真理表を完成せよ。

P	Q	P $\Longrightarrow$ Q	P and (P $\Longrightarrow$ Q)	(P and (P $\Longrightarrow$ Q)) $\Longrightarrow$ Q
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

「and, or , not ...」は日本語ではもちろんそれぞれ「かつ、または、... でない」である。ここでは、強調のためあえて英語を用いた。また、つぎのような記法が用いられることもある。

$$P \wedge Q \qquad P \text{ and } Q \qquad (P \text{ かつ } Q)$$
$$P \vee Q \qquad P \text{ or } Q \qquad (P \text{ または } Q)$$
$$\neg P \qquad \text{not } P \qquad (P \text{ でない})$$