日本語技法 NO.2

言葉の意味を決めておく：定義

議論を進める上で、まず大事なことは、ひとつひとつの言葉を皆が同じ意味に理解することである。(これは簡単なことではない。たとえば憲法 9 条の例を考えよ。)

言葉の意味を曖昧なく定めることを「定義する」という。たとえば、つぎの定義は、記号の使い方についての取り決めである。

定義 2.1.

$$\mathbb{Z} = (\text{整数の全体のなす集合}),$$
$$\mathbb{Q} = (\text{有理数の全体のなす集合}),$$
$$\mathbb{R} = (\text{実数の全体のなす集合}),$$
$$\mathbb{C} = (\text{複素数の全体のなす集合}),$$
$$\mathbb{N} = (0\ \text{以上の整数のなす集合}).$$

余談ながら、$\mathbb{N}$ 以外は、良く出て来る記号なので覚えておいたほうが良い。$\mathbb{N}$ について、「自然数」に 0 を入れる流儀と入れない流儀がある。高校では混乱を避けるために一律「入れない」ことになっているが、どちらが「正しい」というわけでもない。議論のあいだじゅう一律に決めておけばそれでよい。

◎現代数学の建前では、

- 0 の定義.
- 1 の定義.
- a, b がわかっているときに、組 (a, b) の定義.
- 集合の定義.

等から始まって、自然数、実数、複素数と定義していくことになっている。しかし、それを全部この講義でやると時間がなくなること必定なので、整数、有理数、実数、複素数、集合、写像などについては、ある程度 (つまり、高校卒業した程度) の知識があるとして以下議論を進める。ただし、「躓き易い部分」については適宜解説する。

2.1. 写像.

定義 2.2. 集合 S と 集合 T が与えられているとする。S の各元 s にたいして、ある T の元 ($f(s)$ と書かれる) がはっきりと (ただ一通りに) 定まっているとき、S から T への f という写像が定義されていると言う。さらに、このとき、S を f の定義域 (または始集合) といい、T を f の終集合と言う。

(1) ようするに、s が与えられているとき、$f(s)$ は誰が答えをだしても必ず(計算間違い等はもちろん除いて)同じになる。ということが大事なのである。
(2) 大学レベルの数学では、始集合と終集合をまず指定してやることが大事である。同じ式で書かれるような写像でも、始集合や終集合が異なれば全く違う写像と考えるべきである。

例 2.1. つぎのおのおのの、「写像のようなもの」について考えよう。

(1) (平面三角形全体) $\ni \Delta \mapsto (a,b,c)(=\ \Delta$ の三辺$) \in \mathbb{R}^3$
(2) (平面三角形全体) $\ni \Delta \mapsto (a+b+c) \in \mathbb{R} \qquad (a,b,c$ は Δ の三辺$)$
(3) $\mathbb{R} \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$
(4) $\mathbb{R}_{>0} \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$

これらのうち、(2),(4) は写像である(うまく定義されている)。(ただし、(4) については平方根を「非負のものをとる」と約束しておく。) (1),(3) は写像ではない(うまく定義されていない)。

問題 2.1. つぎのような写像 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を作りたい。

(*) $$f(1/3) = 3, f(2/5) = 5, f(355/113) = 113, \dots$$

このとき、

(1) f を
$$f(m/n) = n \qquad (m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$$
と定義しようとしても、これはうまく定義されていないことを示しなさい。
(2) (1) を修正して、(*) を満たす写像 f の例を作りなさい。

前回小テストの間違いの例

(誤り 1) すべての正の数 ϵ に対して $|x-a| < \delta$ を満たす δ が存在するならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成立する。

(誤り 2) ある任意の正数 ϵ に対して $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-f(a)| < \epsilon$ が成り立つとき正数 δ が存在する。

(誤り 3) 任意の数 ϵ が 0 より大きいとき、($|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$) を満たすある δ は 0 より大きい。

(誤り 4) 任意の ϵ が正の数のとき、$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-f(a)| < \epsilon$ となるような正数 δ が存在する。

(誤り 5) $|x-a|$ が δ より小さいとき、$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となるような正の任意の ϵ と 正の δ が存在すれば、点 a で連続であると言える。

(誤り 6) 任意の $\epsilon > 0$ にたいして $|x-a| < \delta$ である。それならば $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となるような $\delta > 0$ が存在する。

〇それぞれどこが間違っているか考えるのは良い勉強になる。もっと詳しくはこれからの講義で解説する予定である。