

今日のテーマ

ガロアの基本定理 (2)

ガロアの基本定理を、詳細まで込めて書いておこう。

定理 13.1 (ガロアの基本定理). L が K のガロア拡大のとき、 $G = \text{Gal}(L/K)$ とおくと、

$$\mathcal{G} = \{ G \text{ の部分群} \}$$

と

$$\mathcal{F} = \{ L \text{ と } K \text{ の中間体} \}$$

のあいだには一対一対応がつく。その対応は、

$$\Phi(H) = L^H$$

$$\Psi(M) = \text{Gal}(L/M)$$

で与えられる。さらに、

- (1) $H_1, H_2 \in \mathcal{G}$ に対して、 $H_1 \subset H_2$ と $\Phi(H_1) \supset \Phi(H_2)$ とは同値。
- (2) $H \in \mathcal{G}$ にたいして、 $\Phi(H) = M$ とおくと、 $\Phi(\sigma H \sigma^{-1}) = \sigma(M)$ になりたつ。
- (3) $H \in \mathcal{G}$ が G の正規部分群であることと、 $\Phi(H)$ が K の正規拡大であることは同値。

問題 13.1. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$, $K = \mathbb{Q}$ とおく。このとき L と K のあいだの中間体 M で、 K 上の拡大次数が 4 であるものを二つあげなさい。

問題 13.2. 前問で、 $\text{Gal}(L/K)$ は可換群だろうか、理由をつけて述べなさい。

問題 13.3. 前問で、 $\text{Gal}(L/K)$ の群の構造を理由をつけて述べなさい。