代数学 III 要約 NO.6

今日のテーマ

単純拡大の重要性

前回までに述べたように、体 K 上一つの代数的な元で生成されるような体 $K(\alpha)$ は、α の最小多項式 $m(X)$ を用いて構成される環 $K[X]/m(X)K[X]$ と同型であり、それを用いて「共役」の概念が確立されることになる。K に複数の元を付け加えた場合はどうだろうか。次の定理がそれに答える。

定理 6.1. K は $\mathbb{Q}$ を部分体に持つような体であるとする。K 上代数的な元 α, β にたいして、

$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha + c\beta)$$

を満たすような $c \in K$ が存在する。(実は、もっと強く、上の式を満たさないような $c \in K$ は有限個しかないということが言える。)

注意 6.1. 上で、「K は $\mathbb{Q}$ を部分体に含む」とあるが、そうでない体はこの講義ではほとんど扱わない。上級者向けに、$\mathbb{Q}$ を含まない体の例をあげれば、素数 p にたいして、

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

で定義されるものがある。$\mathbb{F}_p$ の中では通常のように加減乗算ができ、0 以外の任意の元は乗法に関して逆元をもつ (すなわち、$\mathbb{F}_p$ は体である)。ただし、$\mathbb{F}_p$ のなかでは 1 を p 回足すと 0 になる ($p = 0$ である) という点が通常と異なる。

例 6.1. $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{3}$ のとき、$\mathbb{Q}(\alpha + c\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ が $\forall c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対してなりたつ。

例 6.2. $K = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \beta = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ のとき、$\mathbb{Q}(\alpha + c\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ が $\forall c \in \mathbb{Q} \setminus \{1, -1\}$ に対してなりたつ。

問題 6.1.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$$

が成り立つことを示しなさい。

問題 6.2. $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \beta = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ とするとき、

$$\mathbb{Q}(\alpha + c\beta) \neq \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$$

であるような $c \in \mathbb{Q}$ の例を一つ挙げ、その理由を述べなさい。