代数学III 要約 NO.5

今日のテーマ

拡大体の拡大次数、体の自己同型

定義 5.1. K の拡大体 L が与えられているとする。このとき、L は K 上のベクトル空間とみなすことができる。そのようにみたときの L の K ベクトル空間としての次元を L の K 上の拡大次数と呼び、$[L:K]$ で書き表す。

命題 5.1. 前回の定理 *4.2* で、L の K 上の拡大次数は m の多項式としての次数と等しい。

定理 4.2 を用いると、次のことが分かる。

定理 5.2. 体 K の拡大体 L_1 と L_2 があって、$L_1 = K(a_1)$, $L_2 = K(a_2)$ をみたすような $a_1 \in L_1$ と $a_2 \in L_2$ があるとする。もし、a_1 と a_2 の K 上の最小多項式が等しいならば、L_1 から L_2 への環としての準同型写像 ϕ で、$\phi|_K = \mathrm{id}$, かつ $\phi(a_1) = a_2$ を満たすものが唯一つ存在する。

上の定理の ϕ は一種の「共役をとる写像」(No.1 参照) である。とくに L_1 と L_2 とが (たまたま) 等しいときが大事である。

つぎの補題は、本題からは少し外れるが、便利なのであげておく。一部分は一学期の代数学II でやっているはずである。

補題 5.1 (既約性の判定法).
(1) *2* 次または *3* 次の多項式 $f(X) \in K[X]$ が K 上既約であるための必要十分条件は、 $f(a) = 0$ をみたすような $a \in K$ が存在しないことである。
(2) *4* 次の多項式 $f(X) \in K[X]$ が K 上既約であるための必要十分条件は、 $f(a) = 0$ をみたすような $a \in K$ が存在せず、かつ f がいかなる *2* 次の因数 $g(X) \in K[X]$ ももたないことである。
(3) 整数係数の多項式 $f \in \mathbb{Z}[X]$ にたいして、 f が $\mathbb{Q}[X]$ 上可約ならば、f は $\mathbb{Z}[X]$ 上可約である。*(*ガウス*)*
(4) $f \in \mathbb{Z}[X]$ に有理数解 p/q *(*p, q は互いに素な整数*)* が存在するなら、p は f の定数項の約数であり、 q は f の最高次の係数の約数である。

問題 5.1. $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)\mathbb{Q}[X]$ と $\mathbb{Q}[Y]/((Y-1)^2-8)\mathbb{Q}[Y]$ とは環として同型だろうか。(理由も述べること。)