代数学 C NO.13 要約

今日のテーマ

群の集合への作用と表現

定義 13.1. 群 G の集合 X への作用とは、次のような条件を満たす写像

$$G \times X \ni (g, x) \to g.x \in X$$

のことである。

(1) $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$ $(\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X)$.
(2) $e.x = x$ $(\forall x \in X)$.

例 13.1. 群 G と、その部分群 H が与えられたとき、G は G/H に

$$g.[x] = [gx]$$

により作用する。($[x]$ は $x \in G$ の G/H でのクラス).

例 13.2. 群 G の G への作用を次の三種類定義することができる。

(1) $g.x = gx$. (**左作用**)
(2) $g.x = x(g^{-1})$. (**右作用**)
(3) $g.x = gxg^{-1}$. (**共役による作用**).

例 13.3. 有限群 G が与えられているとき、$X = \{G$ の部分群 $\}$ への G の作用が

$$g.H = gHg^{-1}$$

により決められる。更に、正の整数 n に対して、$X_n = \{H \in X; |H| = n\}$ とおくと、G は上記と同じ定義式により X_n にも作用する。

補題 13.1. 群 G が有限集合 X に作用しているとする。このとき G から $\mathfrak{S}_n$ $(n = \#X\ )$ への群準同型が定まる。

※レポート問題

問題 13.1. $G = \mathfrak{S}_3$ にたいし、G の部分群の全体 X を考える。このとき、

(1) X を求めよ。
(2) G は共役により X に作用するから、補題 13.1 のように

$$G \to \mathfrak{S}_6$$

が定まる。この写像を具体的に書き下せ。