代数学 C NO.9 要約

今日のテーマ 準同型定理の証明と準同型定理の応用

定理 9.1 (群の準同型定理). 群 G から別の群 H への準同型写像 $\phi : G \to H$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) ϕ の像 $\mathrm{Image}\,\phi$ は H の部分群である。
(2) ϕ の核 $N = \mathrm{Ker}\,\phi$ は G の正規部分群である。
(3) 剰余群 G/N は $\mathrm{Image}\,\phi$ と同型である。

(補足)

第一回の準同型定理のステートメントでは、N は G の部分群であるとだけ述べているが、実際には正規部分群である。

次に問題になるのは、準同型定理をいかに使いこなすか、ということである。

例 9.1. n は正の整数であるとする。このとき $(\mathbb{Z}, +)$ から $C_n = \langle a; a^n = e$ への写像 f を、

$$f(k) = a^k$$

で定義すると、f は全射準同型であり、$\mathrm{Ker}(f) = n\mathbb{Z}$ である。群の準同型定理により、f は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と C_n との同型を与えることがわかる。

例 9.2. n, m は正の整数で、n は m の倍数であるとする。このとき $C_n = \langle a; a^n = e\rangle$ から $C_m = \langle b; b^m = e\rangle$ への写像 f を、$f(a^k) = b^k$ で定めると、これはうまく定義されていて、全射準同型写像になっている。f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は $N = \langle a^{n/m}\rangle$ に一致する。ゆえに、準同型定理により、

$$C_n/N \cong C_m$$

が成立することが分かる。

例 9.3. 位数 $2n$ の二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b;\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1}\rangle$ から $(\{\pm 1\}, \times)$ への写像 f を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは全射準同型写像になり、f の核は $\langle a\rangle = \{a^k; k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ に一致する。ゆえに、$\langle a\rangle$ は $\mathbb{D}_n$ の正規部分群であり、

$$\mathbb{D}_n/\langle a\rangle \cong \{\pm 1\}$$

が成立することがわかる。

レポート問題

(I) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]_8) = [15x]_{20}$ で与えたとき、これがうまく定義されていることを示し、f が群の準同型であること、および準同型定理により f から得られる同型を対応表を書く等の方法により求めなさい。

訂正:この問題は出題時誤った部分がありました。(15 のところが 12 で、それでは写像がうまく定義されない。) が、そのような誤りに気づくのも大事なので、そのまま採点します。