代数学 C NO.7 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ **《群の、部分群による左剰余類集合は、いつ群になるか。》**
群の部分群による剰余集合が、「自然なやり方で」群になるには、その部分群が正規部分群である事を仮定するのが良い。

定義 7.1. G **を群、** K **をその部分群とする。** K **が** G **の正規部分群であるとは、任意の** $g \in G$ **と任意の** $h \in K$ **とに対して、**

$$ghg^{-1} \in K$$

が成り立つときに言う。

例 7.1. (**正規部分群の例**)

(1) **可換群の部分群は正規部分群である。特に、** $\mathbb{Z}$ **の部分群はすべて正規部分群である。**
(2) **有限巡回群** C_n **も可換群であるから、その部分群はすべて正規部分群である。**
(3) **二面体群** $\mathbb{D}_n = \langle a, b; \quad a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1} \rangle$ **の部分群** $\langle a \rangle$ **は正規部分群である。**

例 7.2. (**正規部分群でない例**)

(1) $\mathbb{D}_n$ **の部分群** $\langle b \rangle$ **は** $\mathbb{D}_n$ **の正規部分群ではない。**
(2) n **次対称群** $\mathfrak{S}_n$ **の部分群** $\mathfrak{S}_{n-1}$ **は** $\mathfrak{S}_{n-1}$ **の正規部分群ではない。**

定理 7.1. (**重要**) G **を群、** H **をその部分群とする。** G/H **に次のような乗法を定めて群にしてやりたい。**

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$$

これが、<u>代表元の取りかたによらずに</u>うまくいって、 G/H **が実際に群になるためには、** H **が正規部分群である事が必要十分である。**

定理 7.2. G **を群、** N **をその正規部分群とする。このとき** G **の二つの元** x, y **に関する次の二つの条件は同値である。**

(1) **ある** $n \in N$ **があって、** $xn = y$ **が成り立つ。**
(2) **ある** $m \in N$ **があって、** $mx = y$ **が成り立つ。**

すなわち、正規部分群でクラスわけする時には、「左」「右」をあまり気にしなくて良い。

発展

定理 7.3. G を群とし、その上の同値関係 $\sim$ が定まっているとする。$G/\sim$ に 乗法を、

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \quad (a, b \in G; \overline{a} \text{ 等は } a \text{ 等のクラスを表す。})$$

で定めたい。この乗法が代表元の取りかたによらずに定まるならば、

$$N = \{x \in G; \quad x \sim e\}$$

は G の正規部分群となり、$a \sim b$ と $a \equiv b \pmod{N}$ とは同値になる。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) m を正の整数とします。二面体群

$$\mathbb{D}_{5m} = \langle a, b; \quad a^{5m} = e, b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$$

の、a^5 で生成された部分群を求めなさい。さらに、これが $\mathbb{D}_{5m}$ の正規部分群であるかどうかを調べなさい。

(II) $\mathfrak{S}_3$ の、$(1\ 2\ 3)$ で生成された部分群をここでは仮に A と書くことにします。A は、$\mathfrak{S}_3$ の正規部分群であることを示しなさい。さらに、$\mathfrak{S}_3/A$ はどのような群になるか、かけ算の表をつくって答えなさい。

(III) 《発展》に挙げた定理のうち、N が正規部分群であると言う部分の証明を書きなさい。(ヒント：次のステップの各々に説明をつければ良い。どれも「明らか」ではない。（もちろん他のやり方を考えてもよろしい。)

- $\overline{e}$ は $G/\sim$ の単位元である。
- $a, b \in N$ ならば $ab \in N$.(サービス：$G/\sim$ の乗法が代表元の取りかたによらない事から、$\overline{a}\overline{b} = \overline{e}\overline{e}$ でなければならない。)
- $\overline{a}$ の $G/\sim$ での逆元は $\overline{a^{-1}}$ である。
- $a \in N$ ならば $a^{-1} \in N.$
- $a \in G, b \in N$ ならば $aba^{-1} \in N.$