

今日のテーマ 《有限群 (続き) ・生成される部分群》

- 群 G と、その部分集合 M とが与えられているとする。このとき、
- M で生成される G の部分群とは、 M を含む最小の部分群のことである。
 - 特に、 G 自身が M で生成される G の部分群であるとき、単に、 G は M で生成される。という。

《生成される部分群》の正確な定義は次のようになる。

定義 4.1 (《生成される部分群》の定義). 群 G とその部分集合 M とが与えられているとする。 G の部分群 H が M で生成される G の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言う。

- (0) H は M を部分集合として含む G の部分群である。
- (1) H は上の条件 (0) を満たすもののうち最小のものである。すなわち、次のことが成り立つ。
 K が、 M を部分集合として含む G の部分集合であれば、 H は K の部分群になる。

問題 4.1. 二面体群 \mathbb{D}_n の元 a^3 で生成される \mathbb{D}_n の部分群の元の個数を $n = 3, 4, 5, 6$ の場合についてそれぞれ計算しなさい。