代数学 C(コア) 演習問題 NO.13

群の作用とその応用編

定義 13.1. 群 G の集合 X への作用とは、次のような条件を満たす写像

$$G \times X \ni (g,x) \to g.x \in X$$

のことです。

(1) $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$ $(\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X)$.
(2) $e.x = x$ $(\forall x \in X)$.

問題 13.1. 群 G の集合 X への作用が与えられているとする。このとき、各 $g \in G$ にたいして、

$$\alpha_g : X \ni x \mapsto g.x \in X$$

は全単射であることを証明しなさい。

問題 13.2. 群 G が有限群で、しかも単純群、すなわち G には e と G 以外に正規部分群が存在しない、と仮定する。このとき、$1 < d < |G|$ をみたすような正の整数 d にたいして、位数 d の G の部分群 H の数 m_d は、0 か、または

$$|G| \leq m_d!$$

をみたすことを証明しなさい。

問題 13.3. 群 G の X への作用が与えられているとする。このとき、各 $x \in X$ にたいして、

$$G_x = \{g \in X; g.x = x\}$$

は G の部分群であることを証明しなさい。

問題 13.4. 有限群 G が有限集合 X に作用しているとする。このとき、各 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{Orbit}(x) = \{g.x; g \in G\}$$

とおくと、$\mathrm{Orbit}(x)$ の元の個数は

$$|G|/|G_x|$$

と等しいことを証明しなさい。

問題 13.5. 群 G は有限群であると仮定し、G の部分群 H が与えられているとする。このとき、H と G のなかで共役な群の個数 s は、$|G|/|H|$ の約数であることを証明しなさい。

問題 13.6. 群 G の位数が $pq(p,q$ は素数で、$p<q)$ だったとする。このとき、G の部分群 N の位数が q なら、N は G の正規部分群であることを示しなさい。

問題 13.7. 群 G の位数が $pq(p,q$ は素数で、$p<q)$ だったとする。このとき、G には位数 q の部分群が存在することを示しなさい。(シローの定理の特別の場合:シローの定理を使わずに証明すること。)