代数学 C(コア) 演習問題 NO.12

群の直積編

定義 12.1. 二つの群 G, K の直積とは、直積集合 $G \times K$ (G の元と K の元のペア (g,k) 全体のなす集合) に、乗法を

$$(g_1, k_1) \cdot (g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2)$$

で定義したものです。

問題 12.1. 群の直積 $G \times K$ は上の乗法によって群になることを示しなさい。

問題 12.2. (0.5 点) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ について考えてみましょう。これは、右手で三角形、左手で四角形を書く (タクトをふる) 問題と関連付けることができます。

$$([1]_3, [0]_4) \leftrightarrow \text{ 右手を左回りに一回動かす}$$
$$([0]_3, [1]_4) \leftrightarrow \text{ 左手を左回りに一回動かす}$$

さて、$([1]_3, [1]_4)$ の位数は 12 であることを実際にやってみなさい。

問題 12.3. 写像 $f : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ を、

$$n \to ([n]_3, [n]_4)$$

で定義します。この時、

(1) f は準同型であることを示しなさい。
(2) f の核は $12\mathbb{Z}$ であることを示しなさい。
(3) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ との元の個数を比較して、両者が同型であることを示しなさい。

問題 12.4. m, n を互いに素な正の整数とするとき、同型 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ が存在することを前問と同様の方法を用いて証明しなさい。

問題 12.5. 前問を用いて、m, n を互いに素な正の整数とするとき、等式 $am + bn = 1$ を満たす整数 a, b が存在することを示しなさい。

問題 12.6.

(1) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を $f(n) = ([n]_3, [n_5], [n]_7)$ で定義すると、これは準同型写像になることを示しなさい。
(2) 上の f を用いて、同型

$$\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

の存在を示しなさい。

問題 12.7. 準同型 $f : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times$ を、

$$f(x) = x^2$$

で定義したとき、次の各問いに答えなさい。

(1) f の像を求めなさい。
(2) f の核を求めなさい。
(3) 同型 $\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$ の存在を示しなさい。

問題 12.8. 写像 $f:\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^\times$ **を、**

$$f(r,\bar{u})=r(\cos(2\pi u)+\sqrt{-1}\sin(2\pi u))$$

により定めると、これはうまく定義できていて、準同型であることを示しなさい。さらに、この準同型は実は同型である(**つまり全単射である**) **ことを示しなさい。**

問題 12.9. 写像 $f:\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l\to\mathfrak{S}_{k+l}$ **を、**

$$\begin{aligned}&[f(\sigma,\tau)](1,2,3,\dots,k,k+1,k+2,\dots,k+l)\\ &\qquad=(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\dots,\sigma(k),k+\tau(1),k+\tau(2),\dots,k+\tau(l))\end{aligned}$$

により定義すれは、f **は準同型であることを示しなさい。更に、**f **は単射であることを示しなさい。**

問題 12.10. 群 G **が与えられているとします。**G **の正規部分群** H,K **が次の二つの性質を満たすとき、**G **は** $H\times K$ **と同型であることを示しなさい。**

(1) $H\cap K=\{e\}$.
(2) G **は** $H\cup K$ **で生成される。**

さらに、このとき $G/H\cong K$ **であることも示しなさい。**

問題 12.11. 互いに素な整数 m,n **が与えられているとします。さらに、**a,b **を**

$$am+bn=1$$

を満たす整数とします。このとき、同型

$$f:\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\quad(f([x]_{mn})=([x]_m,[x]_n))$$

の逆写像を、a,b **を用いてあらわしなさい。**($f^{-1}([s]_m,[t]_n)$ **を** a,b,s,t,m,n **の式であらわしなさい。**)

問題 12.12. G_1,G_2 **はそれぞれ元を二つ以上持つ群とします。このとき、**$G_1\times G_2$ **には**(**自明なものも含めて**) **少なくとも** 4 **つの正規部分群があることを示しなさい。**