代数学演習 I 問題 NO.8

$\boxed{\text{準同型定理編 (2)}}$ 今回（No.8）は、「環」と言えば単位元を持つ可換環のことを指すことにします。また、「準同型」は単位元を保つものだけを考えることにします。

問題 8.1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2-2)\mathbb{Q}[X]$ を示しなさい。

問題 8.2. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分集合 $\mathbb{Z}[1/5] = \{m/5^n; m \in \mathbb{Z}; n = 0, 1, 2, \ldots,)$ は $\mathbb{Q}$ の部分環になることを示しなさい。

問題 8.3.

$$(5X-1)\mathbb{Q}[X] \cap \mathbb{Z}[X] = (5X-1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.4.

$$\mathbb{Z}[1/5] \cong \mathbb{Z}[X]/(5X-1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.5. 環 R のイデアル I と変数 X について、次の同型を示しなさい。

$$R[X]/IR[X] \cong (R/I)[X]$$

問題 8.6. 環 S の部分環 R と S のイデアル I について、

$$R + I = \{r + a; r \in R, a \in I\}$$

は、S の部分環となることを示しなさい。

問題 8.7. 環 S の部分環 R と S のイデアル I について、

$$S = R + I, \quad R \cap I = 0$$

が成り立てば、$S/I \cong R$ となることを示しなさい。

問題 8.8. 環準同型 $f : R \to S$ について、J が S のイデアルであれば、$f^{-1}(J)$ は R のイデアルとなることを示しなさい。

問題 8.9. 環準同型 $f : R \to S$ について、 I が R のイデアルのとき、$f(I)$ は S のイデアルとなりますか？(ならなければ反例を挙げてください。)f が全射ならどうですか？

問題 8.10. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の元をすべて書き並べて、$\bar{0}$ 以外の元の逆元をそれぞれ求めなさい。

問題 8.11. K を体とします。このとき同型 $K[X,Y]/XK[X,Y] \cong K[Y]$ を示しなさい。

問題 8.12. 環 S とその部分環 R とについて、P が S の素イデアルならば、$P \cap R$ は R の素イデアルであることを示しなさい。「素イデアル」を「極大イデアル」にかえるとどうか？

問題 8.13. 環 R のイデアルに I について、 $I \cdot I$ を I^2 と略記します。J も R のイデアルで、$I + J = R$ となれば、$I^2 + J^2 = R$ となることを示しなさい。

問題 8.14. 整域 R の元 a, b について、次を示しなさい。

(1) $a|b$ である (すなわち、ある $c \in R$ があって、 $b = ac$ と書ける) ことと、$aR \subset bR$ とは同値である。

(2) a と b とが同伴である ($すなわち、a|b$ かつ $b|a$ が成り立つ) ことと、$aR = bR$ とは同値である。

問題 8.15. 実数体 $\mathbb{R}$ 上の多項式 $aX^2 + bX + c$ が環 $\mathbb{R}[X]$ で既約となる条件は、$b^2 - 4ac < 0$ であることを示しなさい。

問題 8.16. 体 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ 上の二次式 $X^2 - a$ $(a = \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{6})$ が既約かどうかをそれぞれの a について調べなさい。

問題 8.17. 2^{100000} を 17 で割った余りを求めなさい。

問題 8.18. 自然数 n が与えられたとします。次の関係式を満たす $f, g \in \mathbb{C}[X]$ を一組見つけなさい。

$$(1 + X)f(X) + X^n g(X) = 1$$