代数学演習 I 問題 NO.1

環と体の定義とその周辺編

定義 1.1. $(R, +, \times)$ が環であるとは、それが次の３つの条件を満たすときに言います。

(1) R は $+$ (加法) に関して加法群である。その単位元を 0 と書き、R の零元と言います。
(2) $\times$ (乗法) は結合律を満たす。
(3) $+$ と $\times$ のあいだでは分配法則が成り立つ。すなわち、

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

がすべての R の元 a, b, c について成り立つ

さらに R の元 u が

$$u \times a = a \times u = a (\text{すべての } a \in R \text{ について})$$

を満たすとき、u を R の単位元と言います。(普通は、単位元のことは 1 と書きます。)

簡単に言えば、普通の計算をやってると思って良いです。ただし、割り算ができないことと、積が可換とは限らないことが違います。また、乗法の $\times$ は省略することが多いです。例えば、

$$a \times b = ab.$$

また、$x + x + x = 3x$, $x \times x = x^2$ 等と略記します。

(演習の都合により、上の定義と今回 (No.1) では、環の単位元の存在を仮定しません。が、次回 (No.2) からは、講義と歩調をあわせて、環と言えば通常単位元をもつものとします。)

定義 1.2. 積が可換である環を可換環と言います。単位元が存在して、0 でない元で割り算ができるような可換環を体と言います。

問題 1.1. 環 R の元 a, b に対して、$a0 = 0a = 0, (-a)b = a(-b) = -(ab), ab = (-a)(-b), (3a)(2b) = 6(ab)$ が成り立つことを示しなさい。

問題 1.2. a, b, c, d を 可換環 の元とするとき、次の式を展開しなさい。

$$(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.1}$$

$$(a + b + c + d)(a + b - c - d) \tag{1.2}$$

$$(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 \tag{1.3}$$

問題 1.3. 環の単位元は存在したとしてもただひとつであることを示しなさい。(ヒント：u, v を二つの単位元とすると $uv = \ldots$)

問題 1.4. 次の各集合は環、可換環、体でしょうか？(加法、乗法は断らない限り自然なものを選ぶ。) 更に、単位元はありますか？

(1) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$
(2) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$
(3) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$
(4) 実数を成分に持つ 2×2-行列の全体 $M_2(\mathbb{R})$
(5) 奇数全体の集合 $2\mathbb{Z} + 1$

問題 1.5. 次の各集合は環、可換環、体でしょうか？(加法、乗法は断らない限り自然なものを選ぶ。) 更に、単位元はありますか？

(1) 実数上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ に、次のような乗法を入れたもの

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (\text{ベクトルの外積})$$

(2) $M_2(\mathbb{R})$ に 次の乗法 (普通の積と紛らわしいので $A \times B$ と書かずに $[A, B]$ であらわす) を入れたもの

$$[A, B] = AB - BA \quad (\text{交換子積})$$

(ただし右辺の AB とか BA とか言うのは行列の普通の積です。)

問題 1.6. $\mathbb{Z}$ の部分集合であって、普通の足し算と掛け算について環になっているものを全て挙げなさい。

問題 1.7. 実数の閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数全体は、適当な演算 (各点ごとの足し算、掛け算) のもとに環になることを示しなさい。

問題 1.8.

$$R = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}; \quad f \text{ は連続で、} f(0) = f(1) = 0 \text{ を満たす} \}$$

とおくと、R は各点ごとの足し算、掛け算によって環になることを示しなさい。

問題 1.9. 前問の環 R には単位元が存在しないことを示しなさい。