

今日のテーマ

まとめ

ガロアの基本定理を、詳細まで込めてもう一度書いておこう。

定理 13.1 (ガロアの基本定理).  $L$  が  $K$  のガロア拡大のとき、 $G = \text{Gal}(L/K)$  とおくと、

$$\mathcal{G} = \{ G \text{ の部分群} \}$$

と

$$\mathcal{F} = \{ L \text{ と } K \text{ の中間体} \}$$

のあいだには一対一対応がつく。その対応は、

$$\Phi(H) = L^H$$

$$\Psi(M) = \text{Gal}(L/M)$$

で与えられる。さらに、

- (1)  $H_1, H_2 \in \mathcal{G}$  に対して、 $H_1 \subset H_2$  と  $\Phi(H_1) \supset \Phi(H_2)$  とは同値。
- (2)  $\Phi(H) = M$  のとき、 $\Psi(\sigma(M)) = \sigma H \sigma^{-1}$ 。
- (3)  $H \in \mathcal{G}$  が  $G$  の正規部分群であることと、 $\Phi(H)$  が  $K$  の正規拡大であることは同値。

次のことは本筋というわけではないが本講義ではたびたび同様のことをおこなってきたのでついでに述べておこう。

補題 13.1. 体  $K$  の元  $a, b$  に対して、

$$K(\sqrt{b}) \ni \sqrt{a}$$

ならば  $a, b, ab$  のうちどれか一つは  $K$  の元の二乗である。

問題 13.1. 体  $K$  の元  $a, b, c$  が、 $[K(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) : K] < 8$  をみたすならば、 $a, b, c, ab, ac, bc, abc$  のうちどれかは  $K$  の元の二乗であることを示しなさい。