代数学III 要約 NO.5

今日のテーマ

環の準同型定理と体の自己同型 (2)

前回、次の定理の証明が残っていた。

定理 5.1. *[再掲]* 体 K の拡大体 L は K 上一つの元 a で生成されているとする。さらに、a は K 上代数的であるとする。このとき、a の最小多項式を $m(X)$ とすると、次のことがいえる。

(1) $\varphi : K[X] \to L$ を $\varphi(p(X)) = p(a)$ できめると、φ は全射環準同型である。

(2) φ の核は $m(X)k[X]$ である。

上の定理の証明のついでに、もう一つ大事な概念を追加しておこう。

定義 5.1. K の拡大体 L が与えられているとする。このとき、L は K 上のベクトル空間とみなすことができて、そのようにみたときの L の K ベクトル空間としての次元を L の K 上の拡大次数と呼び、$[L : K]$ で書き表す。

命題 5.2. 上の定理 *5.1* で、L の K 上の拡大次数は m の多項式としての次数と等しい。

定理 5.1 を用いると、次のことが分かる。

定理 5.3. 体 K の拡大体 L_1 と L_2 があって、$L_1 = K(a_1)$, $L_2 = K(a_2)$ をみたすような $a_1 \in L_1$ と $a_2 \in L_2$ があるとする。もし、a_1 と a_2 の K 上の最小多項式が等しいならば、L_1 から L_2 への環としての準同型写像 ϕ で、$\phi|_K = \mathrm{id}$, かつ $\phi(a_1) = a_2$ を満たすものが唯一つ存在する。

上の定理の ϕ は一種の「共役をとる写像」(No.1 参照) である。とくに L_1 と L_2 とが (たまたま) 等しいときが大事である。

定理 5.4. 体 K の拡大体 L があって、$L = K(a)$ をみたすような $a \in L$ があるとする。a の K 上の最小多項式を $m(X)$ とおく。もし、L の元 b が $m(b) = 0$ をみたすならば、が等しいならば、L から L への環としての準同型写像 ϕ で、$\phi|_K = \mathrm{id}$, かつ $\phi(a) = b$ を満たすものが唯一つ存在する。さらに、ϕ は全単射にもなる。

問題 5.1. $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)\mathbb{Q}[X]$ と $\mathbb{Q}[Y]/((Y - 1)^2 - 8)\mathbb{Q}[Y]$ とは環として同型だろうか。(理由も述べること。)