代数学 II 要約 NO.7

今日のテーマ
$\boxed{\text{直積と半直積}}$

定義 7.1. 群 G の部分群 H と K が与えられたとする。このとき G の部分集合 HK を

$$HK = \{hk; h \in H, \quad k \in K\}$$

で定義する。

HK は一般には G の部分群とは限らない。が、K が「よい」場合には話は別である。

命題 7.1. 群 G の部分群 H,K があって、K がさらに G の正規部分群ならば、HK は G の部分群になる。

定義 7.2. どんな群 G の部分群 H,K があって、

(1) K がさらに G の正規部分群、
(2) $H \cap K = \{e\}$
(3) $HK = G$

がなりたつとき、 G は H と K の半直積であると呼び、$G = H \ltimes K$ と書かれる。

H と K の両方が G の正規部分群のときはどうだろうか。

命題 7.2. 群 G の正規部分群 H, K が $H \cap K = \{e\}$ をみたすならば、任意の $h \in H$ と任意の $k \in K$ に対して、$hk = kh$ が成り立つ。

上の定義 ??において、とくに H も正規部分群のときに G は H と K の直積であると呼ばれる。
半直積の構造は比較的よく分かる。

定理 7.3. $G = H \ltimes K$ のとき、$h \in H, k \in K$ にたいして、$hkh^{-1} = {}^h k$ とかくと、 ${}^h k$ は K の元であり、

(1) ${}^h(k_1 k_2) = {}^h k_1 {}^h k_2 \qquad (h \in H, k_1, k_2 \in K)$
(2) ${}^{h_1 h_2} k = {}^{h_1}({}^{h_2} k) \qquad (h_1, h_2 \in H, k \in K)$

をみたす。逆に、群 H,K および上の二つの条件を満たす対応

$$\Phi : H \times K \ni (h, k) \to {}^h k \in K$$

があれば、 H,K および Φ をつかって G を構成することができる。

問題 7.1. 群 G の部分群 H, K で、 HK が G の部分群にならないようなものの例を一つ挙げよ。(理由も述べること)。