代数学 I 特論要約 NO.9

今日のテーマ
復習と例

例 9.1. $p = 13$ とし、$K = \mathbb{F}_p$ 上の多項式

$$f(X) = X^6 - 2$$

を考えよう。

(1) (a) f と $X^{p^2} - X$ とは互いに素である。
(b) f と $X^{p^3} - X$ とは互いに素である。
したがって、f は一次、二次、三次の因数をもたない。すなわち、f は K 上既約である。
(2) f の根の一つを ξ とし、$L = K(\xi)$ とおくと、L は K の 6 次拡大である。
(3) フロベニウス写像 F によって、$\xi \in L$ は

$$F(\xi) = \xi^p = 4\xi$$

と 4ξ にうつる。
(4) L と K のあいだの中間体は、$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の分だけある。具体的には、

$$L, K(\xi^2), K(\xi^3), K$$

である。

面白いことに、p の値によっては $\mathbb{F}_p$ の d 次拡大は $X^d - a$ の形の多項式では決して得られないことがある。問題を参照のこと。

例 9.2. $p = 11$ とし、$K = \mathbb{F}_p$ 上の多項式

$$f(X) = X^6 - X - 1$$

を考えよう。

(1) (a) f と $X^{p^2} - X$ とは互いに素である。
(b) f と $X^{p^3} - X$ とは互いに素である。
したがって、f は一次、二次、三次の因数をもたない。すなわち、f は K 上既約である。
(2) f の根の一つを ξ とし、$L = K(\xi)$ とおくと、L は K の 6 次拡大である。
(3) フロベニウス写像 F によって、$\xi \in L$ は

$$F(\xi) = \xi^p = \xi^5 + \xi + 1$$

と $\xi^5 + \xi + 1$ にうつる。
(4) L と K のあいだの中間体は、$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の分だけある。具体的には、

$$L, K(\xi + \xi^{11^2} + \xi^{11^4}), K(\xi + \xi^{11^3}), K$$

である。

上の計算の補足の意味で、ξ に次々 F を作用させるとどうなるか書いておく。

$$
\begin{aligned}
F^0(\xi) &= \xi \\
F^1(\xi) &= \xi^5 + \xi + 1 \\
F^2(\xi) &= 7\xi^5 + 6\xi^4 + 4\xi^3 + 8\xi^2 + 3\xi + 7 \\
F^3(\xi) &= 4\xi^4 + 5\xi^3 + 9\xi^2 + 5\xi \\
F^4(\xi) &= 2\xi^5 + \xi^4 + 4\xi^3 + \xi^2 + 10\xi + 2 \\
F^5(\xi) &= \xi^5 + 9\xi^3 + 4\xi^2 + 2\xi + 1 \\
F^6(\xi) &= \xi
\end{aligned}
$$

問題 9.1. $p = 11$ のとき、$\mathbb{F}_p$ 上の多項式 $X^6 - a$ $(a \in \mathbb{F}_p)$ は既約になり得ないことを示しなさい。

問題 9.2. $p = 17$ のとき、$\mathbb{F}_p$ 上の 6 次既約多項式の例を見つけ、それが既約であることを示しなさい。