代数学 II 要約 NO.13

今日のテーマ: $\boxed{\text{復習と整理}}$
(群 G の表現)=(群環 $\mathbb{C}[G]$ の表現)
中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ は $S(g)$ で生成される
$\mathbb{C}[G]$ の中心元はすべてある多項式をみたす。
表現は中心元の固有値で分解できる。
既約表現上では、中心元の作用は全て定数倍であらわされる。
$\mathfrak{S}_n$ の表現はヤング図形から作ることができる。
次のことは、講義では扱わなかったが、覚えておくと便利だろう。
n 次のヤング図形 λ に対する $\mathfrak{S}_n$ の表現 π_λ の表現空間 V_λ の基底として、

$$\{\Delta_T; T \text{ は } \lambda \text{ を台とする標準盤}\}$$

をとることができる。ここで、標準盤とは、各行ごとに、番号が右の方に向かって増加し、各列ごとに、番号が下の方に向かって増加しているような盤のことをいう。

試験問題予想例 (レポートではない。)
完全に同じ問題は出ない。どこかしら数字や、群などがかわって出題されるだろう。

問題 13.1. $\mathbb{D}_8 = \langle a, b; a^4 = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ は a, b をそれぞれ $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)$ と同一視することにより $\mathfrak{S}_4$ の部分群とみることができる。そこで、$\mathbb{C}[\mathbb{D}_8]$ の中心の元 $c = a^2$ と、4 次のヤング図形 $\lambda = \ydiagram{3,1}$ に対して、c の π_λ 上での最小多項式を求めなさい。

問題 13.2. ある表現 (ベクトル空間) V 上に元 z が (線型に) 作用していて、z は $z(z-1)(z-2) = 0$ を満たしているとする。このとき、V を z の固有空間 (3 つある) をそれぞれ $f(z)V, g(z)V, h(z)V$ の形であらわせ。(具体的に f, g, h を求めよ。)

問題 13.3. (類題) 環 R の元 x の最小多項式が $T(T-1)(T-2)$ であるとき、x を用いて R の巾等元を 3 つ作れ。

問題 13.4. 次のような条件を同時に満足する正方行列 A の例を挙げよ。(サイズは問わない)
(1) $A^2(A-E)(A-2E) = 0$
(2) A は非自明な 3 次の関係式を満足しない。

問題 13.5. $\mathbb{D}_{2n}$ の群環 $\mathbb{C}[\mathbb{D}_{2n}]$ の中心の ($\mathbb{C}$ 上の) 次元を求めよ。