代数学 II 要約 NO.11

今日のテーマ: $\boxed{\text{群環 } \mathbb{C}[G] \text{ の環としての構造}}$
G の表現を全て求めるための決定打が、次の定理だ。

定理 11.1. $\mathbb{C}[G]$ は全行列環 $M_k(\mathbb{C})$ の幾つかの直積と環として同型である。

$$\mathbb{C}[G] \cong \prod_{i=1}^{\ell} M_{k_i}(\mathbb{C})$$

$\mathbb{C}[G]$ を中心元による固有分解することによって、上の定理は次の命題に帰着される。

命題 11.2. $\mathbb{C}$ 上の有限次元環 R が、

(1) $Z(R) = \mathbb{C}$
(2) 全ての左 R-加群は完全可約である。

という条件を満たせば、R はあるサイズの全行列環 $M_k(\mathbb{C})$ と同型になる。

実は、命題 11.2 の (2) の仮定のもとでは、中心元による固有分解は、両側イデアルによる分解でもある。それが次の補題である。

補題 11.1. R が命題 *11.2* の *(2)* を満たすとき、R の任意の *(*両側*)* イデアル I に対して、R のある *(*両側*)* イデアル J が存在して、$R = I \oplus J$ がなりたつ。とくに、R が命題 *11.2* の条件 *(1),(2)* をともに満たせば、R には非自明な *(*両側*)* イデアルが存在しない。

命題 11.2 の証明にはその他に以下の補題を用いる。ポイントは、抽象的な条件式 (1),(2) からいかにして基本行列 E_{ij} に該当するものを見つけ出してくるかというところにある。

補題 11.2. 環 R の左イデアル J_1, J_2 があって、R が *(*R-左加群として*)* $J_1 \oplus J_2$ と等しいならば、R の元 e_1, e_2 で、次の条件を満たすものが唯一つ存在する。

(1) $e_1 \in J_1, \quad e_2 \in J_2.$
(2) $e_1 + e_2 = 1.$
(3) $J_1 = Re_1, \quad J_2 = Re_2.$

$R = M_2(\mathbb{C})$ に対して、$J_1 = RE_{11}, J_2 = RE_{22}$ というのが上の補題の代表的な例である。

以下、さらに細かく基本行列を作り出すことになる。それらの証明はどれも面白いのだが、細かい話になるし、詳細を知りたい人はむしろ自力で考えた方が良いので、すべて演習問題にまわすことにする。
まず、$E_{11}, E_{22}, E_{33}, \dots, E_{kk}$ にあたるものを作り出す。

補題 11.3. 命題 *11.2* の仮定のもとで、

(1) $R = Ra_1 \oplus Ra_2 \oplus Ra_3 \oplus Ra_4 \oplus \cdots \oplus Ra_k$ かつ各 Ra_i は既約左 R-加群であるような $a_1, \dots, a_k$ が存在する。
(2) さらに、$a_1, a_2, \dots, a_k$ は

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$$

を満たすように選べる。
(3) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ を上のように選んでおくと、

$$a_i a_j = \delta_{ij} a_i \qquad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

が成り立つ。(ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタ。)

補題 11.4. 上記補題の仮定の元で、$a_1, a_2, \dots, a_k$ を *(1)* および *(2)* が成り立つように選んでおくと、$R_1 = a_1 R a_1$ は環になり、しかも非自明な左イデアル *(*R_1 の R_1*-部分加群)* をもたない。

補題 11.5. $\mathbb{C}$ 上有限次元の環 S が、非自明な左イデアルをもたないならば、$S = \mathbb{C}$ である。特に、補題 *11.4* の $a_1 R a_1$ は $\mathbb{C}$ に一致する。

E_{ij} にあたるものを作り出すのが問題 11.7 である。
さて、定理 11.1 により、G の表現論のかなりの部分は全行列環の表現を調べることに帰着される。実は全行列環の表現は限られたものしかない。

定理 11.3. $\mathbb{C}^k$ は自然なやり方で $M_k(\mathbb{C})$-加群と見ることができる。これをここでは V_k と書くと、$M_k(\mathbb{C})$ の任意の有限次元表現は V_k の有限個の直和と *(*$M_k(\mathbb{C})$ 加群として*)* 同型である。 とくに、$M_k(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現は必ず V_k と同型である。

問題 11.1. $R = M_3(\mathbb{C})$ のとき、補題 11.3 の条件 (1),(2),(3) を満たす a_1, a_2, a_3 を見つけ出し、その a_1, a_2, a_3 にたいして Ra_1, Ra_2, Ra_3 に行列 x が入るための条件を x の成分を用いてあらわせ。

問題 11.2. R の左 R-部分加群 (つまり、R の左イデアル) $J(\neq 0)$ が R-加群として既約ならば、ある $a \in J$ があって、 $J = Ra$ が成り立つことを示せ。(ヒント:J の任意の元 b に対して、Rb も R の左イデアルである。)

問題 11.3. 補題 11.3 の (1),(2) が成り立つような $a_1, a_2, \ldots, a_k$ に対して、同補題の (3) が成り立つことを示せ。(ヒント:$a_1 = a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ の右辺を展開し、両辺の分解 (1) に関する成分を比較せよ。

問題 11.4. 補題 11.3 の仮定のもとでどの $x, y \in R$ にたいしても、$xRy \neq 0$ であること、すなわち、ある $w \in R$ があって $xwy \neq 0$ であることを示しなさい。(ヒント:y を一つ固定する毎に、$\{x \in R; xRy \neq 0\}$ は R の両側イデアルになる。)

問題 11.5. 体 k 上有限次元の環 S が、非自明な左イデアルをもたないと仮定する。このとき、

$$(a, b \in S \text{ かつ } ab = 0) \implies (a = 0 \text{ または } b = 0)$$

が成り立つことを示しなさい。(ヒント: a が 0 でないとすると、Sa は S の左イデアルで、0 ではないから、S にならざるを得ない。ここから $xa = 1$ なる $x \in S$ の存在を導く。)

問題 11.6. 補題 11.5 を証明せよ。(ヒント:任意の $z \in S$ にたいして、$1, z, z^2, z^3, \ldots, z^{\dim_{\mathbb{C}} S}$ は一次独立たり得ないため、z は S 上ある方程式をみたす。そのような方程式のうち次数が最小のもの (z の最小多項式) を $f(X)$ とすると、代数学の基本定理により $f(X)$ は X の一次式の積に分解する。つまり、

$$(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3) \ldots (z - c_l) = 0$$

なる $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_l$ が存在する。あとは前問をもちいる。)

問題 11.7. 補題 11.3 の仮定のもとで、$\dim_{\mathbb{C}}(a_i R a_j) = 1$ であることを示しなさい。(ヒント: 問題 11.4 を用いて、0 と異なるような $a_1 x a_i$, $a_j y a_1$ を見付けてきて、補題 11.5 を援用する。)