代数学 II 要約 NO.5

今日のテーマ:

同型な表現 (基底の変換)。 群 G の表現と群環 $K[G]$-加群が同じものであること。

群の表現は G から $\mathrm{GL}_n(K)$ への群準同型として定義されたが、それは G の $V = K^n$ への「作用」としても決めることができたことを思い出そう (No.3). V のことを G の作用をこめて G-加群とよぶことがある。

定義 5.1. 群 G が K 上の二つのベクトル空間 V_1, V_2 に作用しているとする。V_1 から V_2 への全単射 $f : V_1 \to V_2$ があって、次の条件をみたすとき、V_1 と V_2 は G の作用をこめて同型 (G-加群として同型) であるという。

(1) f は K-ベクトル空間としての準同型である。つまり、足し算、スカラー倍を保つ。

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \qquad f(cv) = cf(v) \qquad (v, w \in V_1, c \in K)$$

(2) f は G の作用を保つ。

$$f(g.v) = g.(f(v)) \qquad (g \in G, v \in V_1)$$

補題 5.1. 群準同型 $\rho_1 : G \to GL_n(K)$ と $\rho_2 : G \to GL_m(K)$ からきまる G-加群 K^n と K^m が G-加群として同型であるための必要十分条件はある正則行列 P があって、任意の $g \in G$ に対して、

$$P\rho_1(g)P^{-1} = \rho_2(g)$$

が成り立つことである。

(このような P が存在するとき、ρ_1 と ρ_2 とは同値であるといわれる。

とくに、同じベクトル空間の基底をいろいろ取り換えても同値な表現が得られる。

同値な表現同士はある意味で「同じ」ものであるが、どうせ同じものを見るのならば基底をうまくとって表現行列が簡単になるようにしたほうがよい。

ついでに、G-加群と $K[G]$ 加群は同じものの違う見方であることを述べておこう。

定義 5.2. 一般に、環 R に対して、M が R-加群であるとは、R の M への「作用」

$$(r, m) \mapsto r.m$$

が決まっていて、次の条件を満たす時にいう。

(1) $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2 \quad (r \in R, m_1, m_2 \in M)$
(2) $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m \quad (r_1, r_2 \in R, m \in M)$
(3) $(r_1 r_2).m = r_1.(r_2.m) \quad (r_1, r_2 \in R, m \in M)$
(4) $1_R.m = m \quad (m \in M)$

補題 5.2. G-加群 V は、自然に $K[G]$-加群とみなせる。その逆も正しい。

問題 5.1. 位数 4 の巡回群 $C_4 = \langle a; a^4 = e \rangle$ の正則表現で a に対応する行列 A をもとめ、さらに正則行列 P をうまくとって PAP^{-1} をできるだけ簡単な行列で表現せよ。