代数学特論II 要約 NO.7

今日のテーマ:

$\boxed{\text{既存の環に元を付け加えてできる環}}$

定義 7.1. 環 R にあらたな元 x を付け加えてできた環を $R[x]$ と書く。

付け加えるとはどういう意味だろうか。大きく分けて二つの場合が考えられる。

- R が大きな環 S の部分環で、x は R の元である場合。
- とにかく抽象的な元 x を考えて、それが R 上適当な関係式を満たすとして付け加える場合。

前者の場合には、「$R[x]$ は、R の元と、x とを加減乗除によってうまく組み合わせて作ったものの全体のなす環」と考えればよい。後者の場合には、具体的に $R[x]$ を構成する必要がある。(この場合には、x の関係式を別途記述する必要があるため、$R[x]$ という記号だけでは通常不十分である。)

補題 7.1. モニックな $R[X]$ の元 f に対して、$R_1 = R[X]/f(X)R[X]$ は環になり、R_1 は R に f の根を一つ付け加えたものになっている。

補題 7.2. モニックな $R[X]$ の元 f に対して、$R_1 = R[X]/f(X)R[X]$ を R 上の行列環の部分環として実現することができる。

具体的な環に具体的な元を付け加えるような場合でも、一旦上のテクニックを駆使することにより、環の理解を増すことができる場合がある。

例 7.1. $\mathbb{C}$ のなかで、$\mathbb{C}$ 自身は $\mathbb{R}$ に $\sqrt{-1}$ を付け加えた環と考えることができるが、これは $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X]$ とも、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とも環としては同じ (同型) である。

例 7.2. $\mathbb{C}$ のなかで、 $\mathbb{Q}$ に $\sqrt{2}$ を付け加えた環 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ を考えることができる。これは $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)\mathbb{Q}[X]$ とも、

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とも環としては同じ (同型) である。

命題 7.1. 体 K 上のモニックな多項式 $f(X)$ が K 上既約ならば、$K[X]/f(X)K[X]$ は体になる。逆も成り立つ。

問題 7.1. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ を行列環の部分環として実現せよ。