代数学特論 II 要約 NO.2

今日のテーマ:
$\boxed{\text{行列の弱固有空間}}$
次のことは予備知識として知っているものと仮定する。

定理 2.1. *$\mathbb{C}$ は代数的閉体である。すなわち、$\mathbb{C}$ 上の 1 変数多項式 (つまり、$\mathbb{C}[X]$ の元) で、定数でないものは必ず少なくとも一つの根をもつ。*

系 2.1. *$\mathbb{C}[X]$ の元で、定数でないものは必ず一次式の積に分解できる。*

さて、n 次の正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、

$$E, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$$

は必ず一次従属であるから、

補題 2.1. *モニックな $\mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ の元 $f(X)$ で、*

$$f(A) = 0$$

を満たすものが必ず存在する。

ということが分かる。このような f のうち、次数の最小なものを A の最小多項式と呼ぶ。本講義では、しばらく A の最小多項式のことを $\mu_A(X)$ と書くことにしよう。

$$\mu_A(X) = (X - \lambda_1)^{e_1}(X - \lambda_2)^{e_2} \ldots (X - \lambda_s)^{e_s}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ は相異なる μ_A の根で、$e_1, \ldots, e_s$ はそれぞれの重複度) と因数分解することができる。

命題 2.2. *$\mathbb{C}^n$ を、$(A - \lambda_i)^{e_i} = 0$ を満たすような部分空間 V_i の直和に分解することができる。すなわち、*

$$V_i = \{v \in \mathbb{C}^n; (A - \lambda_i)^{e_i} v = 0\}$$

なる式で V_i を定義すると、

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^s V_i$$

と $\mathbb{C}^n$ は V_i の直和に分解される。

命題 2.3. *次のような $\mathbb{C}[X]$ の元 $p_1, p_2, \ldots, p_s$ が存在する。(具体的に $\lambda_1, \lambda_s, e_1, e_2, \ldots, e_s$ から計算可能である。)*

(1) $p_1(A) + p_2(A) + \ldots p_s(A) = 1$
(2)

$$p_i(A)p_j(A) = \begin{cases} p_i(A) & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) $p_i(A)\mathbb{C}^n = V_i$

定義 2.1. V_i のことを A の λ_i に属する弱固有空間という。

問題 2.1. 7 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(書いていない成分は全て 0) に対して、命題 2.3 を満たす $p_1, p_2, \ldots, p_s$ を具体的に求めよ。さらに、$p_1(A), p_2(A), \ldots, p_s(A)$ を求めよ。