

## 代数学 II 試験問題

試験の注意：

他人の迷惑になるものを除いては、何でも持ち込み可である。

電卓、コンピュータ等があったほうが簡単な問題もあり得るので、そのようなものを持ち込んでも構わない。

次のうち一問以上をしっかりと解け。

**問題 14.1.** 写像  $\mathbb{F}_p \ni x \mapsto x^k - x^2 \in \mathbb{F}_p$  が定値写像  $\mathbb{F}_p \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{F}_p$  と等しくなるための  $k, p$  の条件を求めなさい。(わからない場合には  $k, p$  のできるだけ多くの組みに対して二つの写像が等しいかどうか判定せよ。)

**問題 14.2.** 体  $K$  の2つの元  $x, y$  が、 $x^2 + y^2 = 0$  を満たすとき、 $x = 0$  かつ  $y = 0$  といえるだろうか。いえるならば証明をつけ、いえないならば反例を3つ以上あげなさい。(  $K$  の標数が0の場合と0でない場合の両方について議論すること。)

**問題 14.3.**  $\mathbb{F}_5$  上の多項式  $X^2 + X - 1$  の根を  $\alpha$  とおくと、 $\mathbb{F}_5[\alpha]$  の多項式  $X^6 - 1$  を一次式の積に分解しなさい。

**問題 14.4.** 奇素数  $p$  が与えられているとすると、 $\mathbb{F}_p$  上の2変数の方程式系  $V_1 = V((X^2 - 2Y^2 - 1)(Y - 2))$  の合同ゼータ関数  $Z(V_1/\mathbb{F}_p, t)$  を求めよ。

**問題 14.5.** 奇素数  $p$  が与えられているとすると、 $\mathbb{F}_p$  上の3変数の方程式系  $V_2 = V((X^2 + Y^2 - Z^2))$  の合同ゼータ関数  $Z(V_2/\mathbb{F}_p, t)$  を求めよ。

**問題 14.6.**  $n = 123556429$  とするとき、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  での  $2^n$  の値を計算せよ。また、 $n$  は素数といえるかどうか、判定しなさい。計算は全部を載せる必要はないが、どのような方法を使ったかは明記すること。