“Non commutative algebraic space of finite arithmetic type”

土基善文(高知大・理)

2005年3月29日

いいニュースがあります。

Google (http://www.google.co.jp/) で

“non commutative algebraic space” を検索すると、出るのは私のページだけです。興味のある方は御参照ください。

(但し、“non” と “commutative” のあいだに空白を忘れずに。)

非可換環と可換環の一番の違い

より小さな環への環準同型(表現)があるかないか。

多くの非可換環 A は両側イデアルをもたない。

$\Longrightarrow$ A から他の環への環準同型は必ず単射。

可換体への準同型なんてとんでもない(不確定性原理)

例: Weyl **環**

$$A_n(R) = R\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n-1}, \gamma_{2n} / \mathrm{CCR} \rangle$$

CCR: **正準交換関係**

$$[\gamma_i, \gamma_j](= \gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i) = h_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

$$(h) = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

R **が標数** 0 **の可換体なら** $A_n(R)$ **は 単純環。**

(**例えば、サイズ** s **が有限の行列で表現できたとすると、**CCR **の両辺のトレースをとって**

$$0 = \mathrm{tr}([\gamma_i\gamma_j]) = \mathrm{tr}(h_{ij}.1_s) = sh_{ij}$$

で矛盾。)

いいニュースがあります。

正標数に落とすと環の表現が増えることがあります。

例: k **が標数** $p \neq 0$ **の体のとき、** $A_n(k)$ **について、次のことが成り立つ。**

- $A_n(k)$ **の中心** $Z_n(k)$ **は** $\{\gamma_i^p\}_{i=1}^{2n}$ **で生成される多項式環である。**

- $A_n(k)$ **は** $Z_n(k)$ **加群としてランク** p^{2n} **の自由加群である。**

$A_n(k) \implies$ (**データの分解**)
($2n$ **次元アフィン平面**)$+$(**その上の環の層**)

$A_n(k)$ **の任意の** k-**環自己準同型はこの分解を保存する。**

標数 $p \neq 0$ なら、 $A_n(k)$ の原点に関する完備化 $\widehat{A}_n(k)$ を考えることもできる。

連続な k-環同型 $\phi : \widehat{A}_n(k) \to \widehat{A}_n(k)$ が与えられたとする。これは $\widehat{A}$ の CCR 生成元が二組与えられたといっても同じ。

ϕ は $\widehat{S}_n = \mathsf{Spf}(k[[T_1, \ldots, T_{2n}]])$ からそれ自身への morphism Ψ と、その上のベクトル束の connection のあいだの関係

$$\Psi^*(\nabla) = G\nabla G^{-1} + \omega.$$

(G:ゲージ変換, $\exists\omega$:スカラー値 1-形式) を与える。

ω のみたす方程式

(1) いつでも成り立つ方程式

$$d(\omega + \rho - \Psi^*(\rho)) = 0$$
$$\omega - C(\omega + \rho - \Psi^*(\rho)) = 0$$

ただし、C は Cartier 作用素で、ρ は

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} T_i dT_{i+n}.$$

(2) ϕ が長さ 2 のWitt vector の環 $W_2(k)$ まで延びていれば

$$d\rho = d(\Psi^*(\rho))$$

つまりこのとき ϕ は $\widehat{S}_n = \mathrm{Spf}(k[[T_1, \ldots, T_{2n}]])$ 上のシンプレクティック形式 $d\rho$ を保存する。

ultra filter で極限をとって標数 0 の世界に戻ってくる。

Spm($\mathbb{Z}$) のultra filter とは、Spm($\mathbb{Z}$) (＋離散位相) の最大コンパクト化のバンダリの点と思ってください。

加群の極限

$M(p)$: $\mathbb{F}_p$-module, $\sup_p \dim_{\mathbb{F}_p}(M(p)) < \infty$

$\Longrightarrow$ $\lim_{p\to\mathfrak{U}} M(p)$ が存在。

環の極限

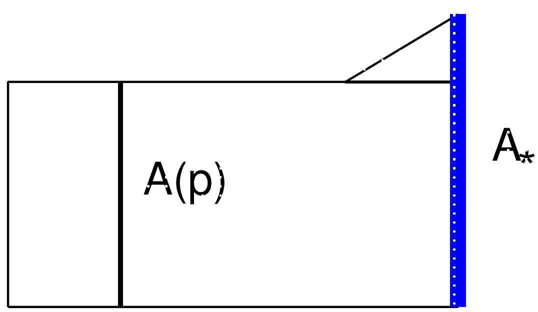
$A(p)$:有限生成の環、$A(p)_i$: そのフィルターづけ

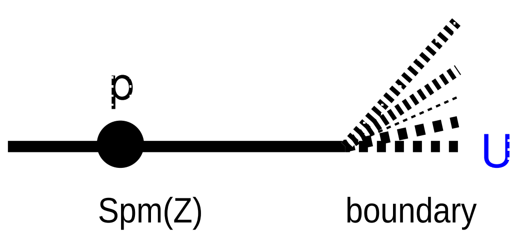
$$\sup_p \dim A(p)_i < +\infty \quad (\forall i)$$

$\Longrightarrow$

$$A_* = \varinjlim_i \left(\lim_{p \to \mathcal{U}} A(p)_i \right)$$

が定まる。





A: $\mathbb{Z}$ (あるいは代数体の整数環) 上の代数

$Z(p)$: A/pA の中心

$\Longrightarrow$

$$Z_* = \lim_{p \to \mathcal{U}} Z(p)$$

を考えることにより、A がよい条件を満たす場合には A の影 (shadow) なる可換代数を定義できる。

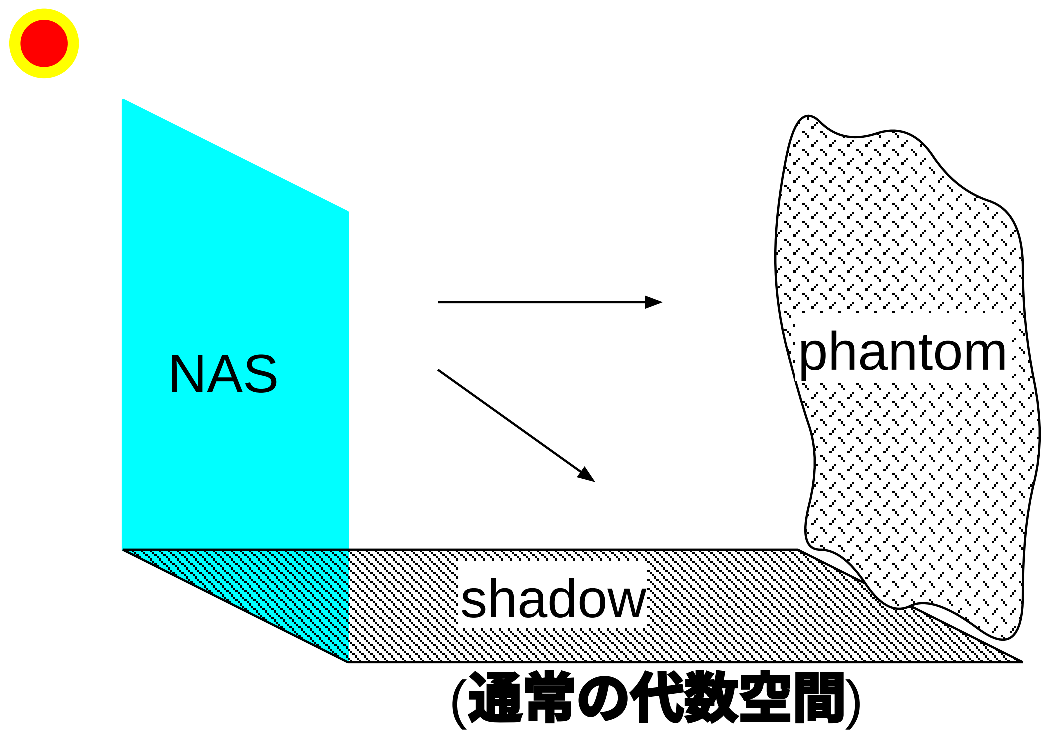
(Weyl 代数, 単純 Lie 環の普遍展開環, GL の量子変形群など)

$$\text{NAS} = (\text{abelian category}) + (p\text{-charts})$$

$$(\text{manifold} = (\text{topological space}) + (\text{charts}))$$

p-chart **とは、**mod p **したものと、**(**ある代数空間** S **上の**coherent**な**(**非可換**)**代数層の** module **の全体**)**との同型。**

非可換代数空間(NAS)**は代数空間**(shadow)**とその上の代数の層**(phantom)**を誘導する。**



点、局所化、完備化などが p-chart **レベル、あるいは** shadow **レベルで行える。**(locally Weyl **なら** shadow **に** symplectic **構造が入る。**)

例: X: **通常の代数空間**, R **上スムース。**$D(X)$: X **上の微分作用素の全体のなす環。**

D-**加群の全体のなすカテゴリ**($D(X)$−mod) **は** NCA **で、 その影は** $T^*(X)$ (X **の余接束の** total space) **である**.